Jean LE ROND D'ALEMBERT

ŒUVRES COMPLÈTES

Série III

Opuscules et mémoires mathématiques, 1757 - 1783

Volume 1

Opuscules Mathématiques, tome I

(1761)

Sous la direction de
Pierre CRÉPEL, Alexandre GUILBAUD, Guillaume JOUVE

Édition établie par
Frédéric CHAMBAT, Michelle CHAPRONT-TOUZÉ, Alain COSTE,
Pierre CRÉPEL, Fabrice FERLIN, Christian GILAIN,
Alexandre GUILBAUD, Guillaume JOUVE, Ryoichi NAKATA,
Dominique VARRY, Jérôme VIARD

CNRS EDITIONS
15, rue Malebranche – 75005 Paris

PRÉSENTATION DU MÉMOIRE 8

« Remarques sur quelques questions concernant l'attraction »

Le huitième mémoire des *Opuscules* rassemble des textes sur trois sujets ayant trait à l'attraction et à la figure de la Terre [1]. Le premier concerne la stabilité d'une couche fluide sur un noyau solide et fait suite à une remarque de Boscovich, le deuxième est une correction d'un passage de la *Cause des vents*, le troisième considère à nouveau le paradoxe, introduit dans les *Recherches sur le système du monde*, de la discontinuité de l'attraction à travers une surface. Il s'agit donc d'un assemblage typique des *Opuscules* : ajouts dépareillés à des textes antérieurs et destinés pour certains à être complétés plus tard. Nous les présenterons séparément puisqu'ils ont peu en commun, si ce n'est, dans les parties I à IV, la tentative sous-jacente pour trouver de nouvelles hypothèses qui pourraient réconcilier théorie et observations de la figure de la Terre, notamment en introduisant un noyau solide dans le modèle de Terre ou en tenant compte de la *dissimilitude des méridiens*. Les expéditions de l'Académie des sciences avaient bien conclu à l'aplatissement de la Terre aux pôles plutôt qu'à son allongement, mais les valeurs observées de l'aplatissement ne rentraient pas dans les limites imposées par la théorie de Clairaut [2].

---

1. Nous renvoyons au vol. III/6 des *O.C.* pour une synthèse des recherches de D'Alembert sur la figure de la Terre. Pour une introduction générale sur la forme de la Terre nous conseillons l'ouvrage dirigé par H. Lacombe et P. Costabel, *La figure de la Terre du* XVIII*e siècle à l'ère spatiale*, Académie des Sciences, Paris, 1988.

2. Voir, par exemple, V. Deparis et H. Legros, *Voyage à l'intérieur de la Terre*, Paris, 2000, et le vol. I/7 des *O.C.*, M. Chapront-Touzé et J. Souchay (éd.), « Introduction générale », sect. IV, p. xxxvi-xlii et sect. X, p. lxxiii-lxxvii.

Dans cette présentation et les annotations du mémoire nous désignons par *aplatissement* la différence du rayon équatorial au rayon polaire normalisée par un des rayons, sans faire de distinction entre les normalisations possibles. On distingue parfois *aplatissement* et *ellipticité* mais la différence entre les deux n'est que du deuxième ordre et n'est pas essentielle ici. Voir, par exemple, le vol. I/7 des *O.C.* et le glossaire : ELLIPTICITÉ.

STRUCTURE DU MÉMOIRE

Trois sujets indépendants

Ce mémoire comporte cinq parties représentant en fait trois sujets indépendants. Ces trois ensembles peuvent être résumés ainsi :

– parties I et II : la figure et la stabilité d'une mince couche fluide sur un noyau solide, tous deux ellipsoïdaux, dépendent moins de la figure du noyau que du rapport de leurs densités.

– parties III et IV : correction et augmentation d'un passage de la *Cause des vents* sur l'équilibre d'un ellipsoïde proche de la sphère et à trois axes inégaux. L'équilibre n'est possible qu'avec un noyau solide de densité différente de la couche superficielle.

– partie V : « paradoxe » de la discontinuité de l'attraction au travers d'une surface sphérique. Sur la surface, l'attraction est moitié de celle au voisinage extérieur de la surface.

Le mémoire est clairement résumé par D'Alembert dans l'*Avertissement* du volume (p. vij-viij) et a été commenté par Todhunter[3]. Les quelques éléments que nous possédons sur la datation du mémoire sont donnés dans l'introduction générale des éditeurs.

I. STABILITÉ D'UNE MINCE COUCHE FLUIDE SUR UN NOYAU SOLIDE (PARTIES I ET II)

La *Cause des vents*

La partie I du mémoire prend comme point de départ l'article 31 de la *Cause des vents*. D'Alembert y étudie l'équilibre d'une couche homogène en équilibre hydrostatique sur un noyau solide homogène[4]. Les deux couches ont une forme ellipsoïdale de révolution. D'Alembert ne précise pas si la couche superficielle représente à la fois les océans et les continents. D'après M. Chapront-Touzé et J. Souchay[5] c'est l'hypothèse la plus probable puisqu'il écrit dans l'article FIGURE DE LA TERRE[6] :

> « Enfin la surface de la Terre dans sa glus grande partie est fluide, & par conséquent homogene ; la matiere solide qui couvre le reste de cette surface, est presque par-tout peu différente en pesanteur de l'eau commune ; n'est-il donc pas

3. I. Todhunter, *A History of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace*, Londres, 1873 ; réimpression, New York, 1962 ; articles 566-569, et indirectement dans les articles 380-383, 434-435 et 589-591.

4. Voir glossaire : SOLIDE. Le terme *solide* implique ici que le noyau n'est pas soumis à la condition d'équilibre hydrostatique et peut donc avoir une forme quelconque.

5. *O.C.*, vol. I/7, p. 212-213, note 5.

6. *Enc.*, t. VI, p. 759b-760a.

> naturel de supposer que cette matiere solide fait à-peu-près le même effet qu'une matiere fluide, & que la Terre est à-peu-près dans le même état, que si sa surface étoit par-tout fluide & homogene. »

Quoi qu'il en soit le *noyau* n'a pas le sens moderne du noyau terrestre fluide.

Equilibre de la couche fluide

D'Alembert commence par rappeler l'équation donnée dans la *Cause des vents* qui exprime l'équilibre hydrostatique de la couche superficielle. Il note pour cela α (respectivement α') la différence entre le rayon équatorial et le rayon polaire du sphéroïde extérieur (respectivement intérieur), φ la force centrifuge à l'équateur, p la pesanteur, Δ la densité du noyau, et δ celle du fluide. Il fait les hypothèses que l'épaisseur du sphéroïde fluide extérieur est petite devant le rayon (à l'ordre 0) r et que les différences α et α' sont petites devant r. En l'écrivant sous une forme légèrement différente de la sienne (p. 247), la relation d'équilibre donne la différence des rayons équatorial et polaire de la surface extérieure en fonction des autres paramètres :

$$\alpha = \frac{5\Delta\varphi r/2p + 3\alpha'(\Delta - \delta)}{5\Delta - 3\delta}.$$

En termes modernes, pour montrer cette relation on exprime le fait que la surface externe est une équipotentielle de pesanteur. L'égalité qui en résulte comprend alors trois termes : un terme lié à la forme externe de la Terre, un deuxième lié à sa rotation et un troisième à son attraction. Suivant que ce dernier soit exprimé en fonction des différences de pesanteurs ou d'inerties polaire et équatoriale, la relation est nommée *équation de Clairaut* ou *équation de D'Alembert*[7]. En se donnant un modèle particulier de densité on peut déterminer le troisième terme en fonction des deux autres et exprimer alors la forme de la surface en fonction de la vitesse angulaire de rotation et des paramètres intérieurs — densité et éventuellement forme des surfaces solides comme dans l'équation ci-dessus.

Dans la *Cause des vents*, D'Alembert déduit de cette relation que, si la densité du noyau est suffisamment faible alors le fluide peut prendre une figure allongée ($\alpha < 0$) quand bien même le noyau est aplati ($\alpha' > 0$).

Critique de la *Cause des vents* par Boscovich

D'Alembert considère ici la stabilité de l'équilibre, qu'il nomme ailleurs *fermeté*[8], de cette configuration. Sa motivation est indiquée en début de mémoire : elle est issue d'une critique d'un « géomètre italien » qui n'est autre que

---

7. Cf. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, Paris, 1921 ; 2e éd., 1937, fasc. 2, p. 148 ; W. Jardetzky, *Theories of figures of celestial bodies*, New York, 1958, p. 37 ; F. Mignard, « La théorie des figures », dans H. Lacombe et P. Costabel (dir.), *La figure de la Terre du XVIIIe siècle à l'ère spatiale*, Académie des Sciences, Paris, 1988, p. 281-320 ; R. Wavre, *Figures planétaires et géodésie*, Paris, 1932, p. 66.

8. Voir glossaire : FERME ; le Mémoire 3, § I, Corollaire III dans le présent volume ; le Mémoire 45, § II, art. 31 et § III, art. 8 ainsi que le Mémoire 46, art. 25 du tome VI des *Opuscules*, 1773 (*O.C.*, vol. III/6). L'emploi du terme *stabilité* est ici de nous, D'Alembert ne l'utilise pas.

Boscovich[9]. Celui-ci considère que certaines configurations mentionnées dans la *Cause des vents*, plus précisément celles dont le noyau intérieur est allongé, sont instables. On imagine bien que D'Alembert, rarement enclin à admettre une critique, ait été piqué au vif et se soit empressé d'y répondre. C'est l'objet de ces deux parties.

Réaction du traducteur de Boscovich

Une réponse au Mémoire 8 sera insérée dans une longue note de la traduction française de 1770 de l'ouvrage de Maire et Boscovich[10]. Cette note, qui pourrait être du traducteur, critique à nouveau D'Alembert, notamment le Mémoire 8. En 1773, dans le Mémoire 45 § III[11], D'Alembert répondra que le traducteur s'est trompé. Ce Mémoire 45 § III étant entièrement dédié à cette polémique, nous traiterons plus en détail cette discussion entre D'Alembert et Boscovich dans la présentation du mémoire en question ; cela concerne aussi la correspondance des années 1770 entre D'Alembert et Lagrange : le nom de Boscovich y apparaît à plusieurs reprises, en termes peu flatteurs on s'en doute.

Stabilité de la couche fluide

D'Alembert étudie donc, dans le Mémoire 8 § I et II, la stabilité de la couche fluide. On dirait de nos jours qu'il procède par perturbation de l'équilibre et montre que l'équilibre de la couche fluide est instable si $3\delta - 5\Delta > 0$. Sa discussion sur la stabilité peut être synthétisée de façon moderne si l'on écrit la force tangentielle f_T à la surface du fluide. On peut partir pour cela de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution homogène de densité δ et de différence d'axes équatorial et polaire α, écart supposé petit devant r le rayon de l'ellipsoïde. En coordonnées cartésiennes, avec Oz l'axe de révolution, G la constante de gravitation, l'attraction s'écrit[12] :

$$\vec{g} = \frac{4\pi G\delta}{3}\left(\left(1-\frac{2\alpha}{5r}\right)x,\ \left(1-\frac{2\alpha}{5r}\right)y,\ \left(1+\frac{4\alpha}{5r}\right)z\right).$$

En sommant les attractions d'un ellipsoïde de densité δ et celle d'un ellipsoïde intérieur de densité $\Delta - \delta$ on trouve alors la force tangentielle s'exerçant à la surface de l'ellipsoïde à deux couches homogènes et tournant considéré par D'Alembert :

9. C. Maire et R. J. Boscovich, *De litteraria expeditione per pontificam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam [...]*, Rome, 1755. Nous utiliserons dans l'apparat critique la traduction française parue postérieurement au Mémoire 8 : *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église [...] par les PP. Maire et Boscovich*, trad. fr. [P. Hugon], Paris, 1770. Voir p. 449 le § 214 intitulé « Que si on dérange l'équilibre de ce sphéroïde, il s'en écarte toujours plus ». Ce paragraphe nous semble plus neutre et moins dirigé contre lui que ne l'écrit D'Alembert ; les références à la *Cause des vents* se trouvent d'ailleurs plusieurs pages avant (p. 441-443). Cette partie a été écrite par Boscovich, le jésuite anglais Maire et lui s'étant réparti la rédaction de l'ouvrage.

10. *Ibid.* ; la note prend la plus grande partie des pages 449-453.

11. *Opuscules*, t. VI, Paris, 1773, p. 68-76, 77-84 et 418 ; *O.C.*, vol. III/6. Bien que de moindre envergure, notons un autre prolongement au Mémoire 8 : dans le Mémoire 48, *Opuscules*, t. VI, Paris, 1773 ; aux articles 17-18, D'Alembert considère comme un éventuel paradoxe le cas $5\Delta = 3\delta$.

12. A partir, par exemple, de F. Mignard, « La théorie des figures », dans H. Lacombe et P. Costabel (dir.), *La figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale*, Académie des Sciences, Paris, 1988, p. 295.

$$f_T = \left(5\Delta\frac{\varphi}{2p} + (3\delta - 5\Delta)\frac{\alpha}{r} + 3(\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r}\right)\frac{|\sin 2\theta|}{5\delta}p\,,$$

avec f_T comptée positivement vers l'équateur, et θ la colatitude. La condition d'équilibre donnée précédemment découle de $f_T = 0$. La condition de stabilité s'obtient par une perturbation $d\alpha$ au voisinage d'une position d'équilibre, à laquelle correspond une perturbation de force tangentielle donnée par

$$df_T = (3\delta - 5\Delta)\frac{|\sin 2\theta|}{5\delta r}pd\alpha.$$

Son signe ne dépend pas de α' mais de celui de $3\delta - 5\Delta$. Si $3\delta - 5\Delta > 0$, une augmentation d'aplatissement implique une force dirigée vers l'équateur et l'équilibre est donc instable.

D'Alembert conclut donc avec raison que la stabilité dépend du rapport des densités et non de la forme du noyau comme le prétendait Boscovich. En toute rigueur, il faut remarquer qu'il ne s'intéresse qu'à des perturbations de forme elliptique et montre que les configurations pour lesquelles la densité du noyau est inférieure à trois-cinquièmes de celle du fluide superficiel sont instables. Cela ne prouve pas que les autres configurations sont stables. Pour le savoir il faudrait examiner l'effet de perturbations de toutes formes. Notons, à la décharge de D'Alembert, qu'en mécanique la notion de stabilité de l'équilibre n'en est qu'à ses débuts. Boscovich l'évoque, mais elle ne commencera vraiment à être étudiée qu'avec Lagrange [13]. Plus particulièrement sur les figures d'équilibre, Liapounov et Poincaré étudierons les perturbations de toute forme au voisinage des ellipsoïdes homogènes [14]. Signalons enfin que la stabilité d'une couche fluide sur un noyau solide en rotation est une question qui reste difficile puisqu'en 1938, après avoir longuement étudié la question, Marcel Brillouin admet ne pas être sûr de la réponse qu'il donne [15] et qu'à notre connaissance ce problème n'est pas complètement résolu [16].

---

13. Lagrange, *Méchanique analitique*, Paris, 1788 ; *Œuvres* de Lagrange, t. XI, 1888 et t. XII, 1889. La stabilité y est traitée dans la première partie, section III, § V (p. 69, t. XI des *Œuvres*).

14. En 1884 et 1885 ; pour les références et quelques éléments historiques voir, par exemple, W. Jardetzky, *Theories of figures of celestial bodies*, New York, 1958.

15. Il écrit notamment : « Des difficultés insurmontables rencontrées au cours des études que je poursuis, depuis dix ans, sur les marées avec continents, m'ont amené à douter de l'exactitude de cette supposition [la stabilité de la couche fluide] et à penser qu'on doit au contraire énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un liquide pesant entoure un noyau solide tournant d'une vitesse uniforme, aucune configuration permanente du liquide, immobile par rapport aux axes liés au solide tournant, n'est stable. » Cf. « Instabilité inévitable d'un liquide pesant qui tourne sans mouvement relatif avec un noyau solide qu'il entoure. Conséquences océanographiques et géodésiques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 207, 1938, séance du 7 novembre 1938, p. 816-819.

16. Communication personnelle en mai 2008 de M. Rieutord (Observatoire Midi-Pyrénées), que nous remercions. Notons tout de même pour être exact que les études modernes tiennent compte de la force de Coriolis, absente du Mémoire 8.

Modèle de densité de la Terre

Une autre préoccupation récurrente de D'Alembert est le modèle intérieur de Terre[17] : comment varie la densité avec la profondeur ? Raisonnant, dans ce contexte, en mathématicien plus qu'en physicien il ne souhaite par faire d'hypothèse *a priori* sur la variation de la densité avec la profondeur. C'est ainsi qu'il écrit en page 252 du Mémoire 8 : « les couches les plus voisines du centre, devant selon eux [des auteurs ayant traité de la figure de la Terre], être les plus denses. Mais cela n'est nullement nécessaire ». Cela n'est nullement nécessaire *mathématiquement* mais la réalité physique en devient à l'époque de plus en plus admise. On juge en effet probable que la Terre a été fluide au moins à un moment de son histoire et que les matières les plus denses ont dû descendre vers le centre. D'autre part la densité moyenne de la Terre semble être supérieure à celle des couches externes, suggérant une augmentation de la densité avec la profondeur. Newton déjà, remarquant que la Terre était quatre fois plus dense que Jupiter, elle-même probablement plus dense que l'eau, proposait une densité moyenne de la Terre comprise entre 5 et 6[18]. Par ailleurs Bouguer, par des mesures de pesanteur et de déviation de la verticale au Pérou en 1737, avait le premier, tenté de déterminer cette densité. Suite à une imprécision dans ses hypothèses il trouva un résultat peu satisfaisant. Les premières valeurs convaincantes sont issues de nouvelles mesures de déviation de la verticale par Maskelyne en 1772, puis de l'utilisation de la balance de torsion par Cavendish en 1798. Elles donnèrent des valeurs voisines de 5, à comparer à la valeur moderne de 5,5[19].

II. Équilibre d'un ellipsoïde à trois axes inégaux (parties III et IV)

Correction de la *Cause des vents*

D'Alembert corrige dans la partie III, et augmente dans la partie IV, une addition à l'édition latine de la *Cause des vents*, insérée dans l'article 84 de l'édition française, p. 151-159. Considérant un ellipsoïde homogène, proche de la sphère, sans rotation et à trois axes inégaux, il montrait que l'équilibre hydrostatique est impossible. Ajoutant ensuite un noyau solide de densité différente il arrivait à une conclusion incomplète mais qui peut être résumée ainsi : si le noyau possède une symétrie de révolution alors il doit être sphérique, le fluide superficiel

17. Voir, par exemple, le vol. I/7 des *O.C.*, « Introduction générale », sect. X, p. lxxiii-lxxvii.

18. I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687 ; 2e éd., Cambridge, 1713 ; 3e éd., Londres, 1726. Nous utiliserons dans l'apparat critique de ce mémoire la traduction fançaise : *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. fr. et commentaires Mme du Châtelet, 2 vol., Paris, 1756 ou 1759. Le passage dont il est question s'y trouve t. II, Livre III, Proposition X, Théorème X, p. 26-27.

19. Références et compléments dans les ouvrages de F.-F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, t. II, *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*, Paris, 1891, p. 345, & de V. Deparis et H. Legros, *Voyage à l'intérieur de la Terre*, Paris, 2000, p. 259.

doit être de révolution et le rapport des densités est de 3/5. Ce résultat faux est dû à une erreur de calcul, en page 155. Dans la partie III du présent mémoire D'Alembert corrige cette erreur et trouve essentiellement que, pour tout noyau solide à trois axes inégaux, l'équilibre de la couche fluide superficielle est toujours possible si leurs densités respectives sont différentes. Dans la partie IV il ajoute la force centrifuge et obtient un résultat identique.

Dissimilitude des méridiens

Comme suggéré par les références que D'Alembert donne, il semble que les travaux de Maclaurin et Clairaut [20] l'aient incité à mener ces recherches sur la figure de la Terre. Ce sont tout d'abord les résultats de Maclaurin qu'il généralise pour déterminer l'attraction d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et proche de la sphère. L'incompatibilité, démontrée par Clairaut, entre les mesures et une théorie hydrostatique sur une Terre à symétrie de révolution a, d'autre part, largement inspiré D'Alembert [21]. La recherche de configurations d'équilibre asymétriques comme solution à ce problème est une thématique que l'on retrouve en effet régulièrement dans son œuvre sous la dénomination de *dissimilitude des méridiens* [22]. On sait aujourd'hui que l'état d'équilibre terrestre à long terme est le mieux représenté par une planète entièrement fluide, c'est-à-dire sans partie solide. Dans ce contexte, ce sont Laplace et Legendre [23] qui montreront de manière définitive, grâce aux fonctions qui portent leurs noms, que les ellipsoïdes de révolution sont les seules configurations en équilibre hydrostatique possibles *au voisinage de la sphère*. La possibilité d'ellipsoïdes hydrostatiques à trois axes inégaux sera trouvée en 1834 par Jacobi [24].

III. Attraction d'une surface sphérique (partie V)

L'attraction est discontinue

Newton avait montré que l'attraction d'une coque sphérique est nulle à l'intérieur de la coque et décroissante en inverse du carré de la distance à l'exté-

20. C. Maclaurin, *Treatise of fluxions*, Edinbourgh, 1742 ; sa traduction : *Traité des fluxions*, trad. fr. R.P. Pezenas, Paris, 1749. A. Clairaut, *Théorie de la Figure de la Terre*, Paris, 1743 ; 2^{e} éd., Paris, 1808.

21. Clairaut pensait toutefois que les erreurs de mesure étaient assez grandes pour qu'on puisse les réconcilier avec la théorie : « on verra que sans faire tort à ces mesures, on peut les rapprocher de ma théorie, et trouver un résultat commun » ; *Ibid.*, p. 300. L'avenir lui donna raison.

22. Voir à la fin de cette présentation, les « Autres œuvres » sur le même sujet. Voir aussi l'introduction du vol. III/6 des *O.C.* où nous ferons l'étude thématique sur *la figure de la Terre* dans l'œuvre de D'Alembert.

23. P. S. Laplace, « Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes », *MARS* année 1782 (1785), p. 113-196 ; A.-M. Legendre, « Recherches sur la figure des planètes », *MARS* année 1784 (1787), p. 370-389.

24. C. G. J. Jacobi, « Über die figur des gleichgewichts », Poggendorf Ann. Phys. Chem., vol. 33, 1834, p. 229-233. Ces ellipsoïdes sont homogènes et éloignés de la sphère alors que la recherche de D'Alembert est restreinte à la proximité de la configuration sphérique.

rieur[25]. Dans les *Recherches sur le système du monde*[26], D'Alembert soulève la question de l'attraction d'une surface sphérique, c'est-à-dire d'une coque sphérique que l'on qualifierait de nos jours d'*infiniment mince*. Il considère le résultat qu'il obtient comme un « paradoxe » : l'attraction est discontinue au travers de la surface et, sur la surface, elle est égale à la demi-somme de ses valeurs au voisinage de chaque côté. Dans l'article GRAVITATION[27] quelques lignes étaient consacrées à ce problème. D'Alembert indique que l'intégrale ne prend pas la même valeur suivant qu'on annule la distance à la sphère avant ou après intégration. Dans une note de 1759, Lagrange pense donner une explication plus satisfaisante que D'Alembert à ce paradoxe[28]. La partie V du Mémoire 8 revient sur cette question et consacre notamment une large place aux arguments de Lagrange. D'Alembert pense être plus clair que lui. Dans une lettre du 24 avril 1763 à Daniel Bernoulli[29], Clairaut discute également le problème. Bien que donnant une préférence à l'explication de Lagrange, Clairaut n'est réellement convaincu par aucune des deux. Il semble penser que la valeur de l'attraction, sur la surface sphérique même, ne peut être trouvée que par un argument physique et non mathématique[30].

Les « paradoxes » et la loi de continuité

Ce mémoire est un des nombreux passages de l'œuvre de D'Alembert où il exprime ses questionnements, ses doutes, ses objections, devant les difficultés physico-mathématiques qui émergent et qu'il qualifie de « paradoxes ». C'est l'époque où la discussion sur la signification et les domaines de validité de la « loi de continuité »[31] bat son plein, aussi bien dans les sciences mathématiques que physiques. C'est dans ce contexte que ce mémoire de D'Alembert trouve sa place.

---

25. I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. fr., Paris, 1759, Livre I, Proposition LXX, Théorème XXX et Proposition LXXI, Théorème XXXI, p. 201-203.

26. D'Alembert, *Recherches sur différens points importans du Systême du Monde*, t. III, Paris, 1756, p. 197-199 ; *O.C.*, vol. I/10. C'est la référence qu'il cite dans ce mémoire mais on peut remarquer que, dans le deuxième tome du même ouvrage, p. 283-285, il calcule déjà l'intégrale d'une surface sphérique en distinguant l'intérieur de l'extérieur. Les notions de paradoxe ou d'attraction sur la surface-même n'y sont cependant pas présentes.

27. *Enc.*, t. VII, 1757, p. 871-873.

28. Lagrange, « Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque », *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, 3e pag., note placée au bas des p. 142-145 ; *Œuvres* de Lagrange, t. VII, 1877, p. 591-594.

29. Nous reproduisons cette lettre en annexe de ce volume.

30. Sur cette partie V nous avons consulté avec profit la thèse de I. Passeron, *Clairaut et la figure de la Terre au XVIIIe siècle*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1994. Le chapitre 3-II.4, est consacrée à une analyse des discussions engagées autour de ce paradoxe au XVIIIe siècle. On y trouvera des précisions supplémentaires, comme l'existence d'une lettre de Lagrange à Daniel Bernoulli, datée du 22 août 1759 et faisant suite au mémoire de Lagrange cité ci-dessus.

31. Voir glossaire : CONTINUITÉ.

Les courbes $y = \sqrt{ax}$ $+\sqrt[4]{a^3(x+b)}$.

Comme souvent, D'Alembert profite du mémoire pour établir des liens avec d'autres paradoxes : 1. le rectangle dont le produit des côtés est constant et dont on fait tendre un coté vers 0 devient une droite et perd donc sa surface ; 2. la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$, qui « perd subitement un diamètre lorsque $b = 0$ ». Ce second exemple a été donné en premier par Euler en 1749[32]. D'Alembert discute cette courbe en 1752 dans un mémoire « Sur les logarithmes des quantités négatives » et dans le Mémoire 6 de ce volume[33]. Dans le mémoire déjà évoqué sur l'attraction de la surface sphérique[34], Lagrange considère qu'en réalité cette courbe garde son diamètre. D'Alembert lui donne ici raison mais pense tout de même avoir montré que « ce qu'on appelle la *Loi de continuité* (dans quelque sens qu'on prenne ce mot) ne s'observe pas toujours dans les quantités Algébriques ». L'analyse de leur débat indique que l'ambiguïté provient de l'imprécision dans laquelle se trouve alors la notion de radical : $\sqrt{x}$ est interprété parfois comme $\sqrt{x}$ et d'autres fois comme $\pm\sqrt{x}$.

Explication du paradoxe.

Avec des notations modernes, l'attraction d'une surface sphérique de rayon unité, s'exprime par $\sigma G J(r)$, où σ est la densité surfacique de la sphère, G la constante de gravitation universelle, r la distance au centre et J l'intégrale :

$$J(r) = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{r-u}{(1+r^2-2ru)^{3/2}}\, du.$$

Cette intégrale, qu'étudie D'Alembert sous une forme légèrement différente, vaut :

$$\begin{aligned} &J(r) = 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leq r < 1,\\ &J(1) = 2\pi,\\ &J(r) = 4\pi/r^2 \quad \textit{pour} \quad r > 1. \end{aligned}$$

On sait de nos jours que la fonction $J(r)$ n'est pas continue parce que l'intégrale n'est pas absolument convergente mais semi-convergente[35]. Plus généralement un résultat classique de la théorie du potentiel est que la dérivée normale du

---

32. L. Euler, « De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires », *HAB* année 1749 (1751), p. 139-179 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 17, p. 195-232 (E168). Comme indiqué dans la note 3 p. 272 des *Opera Omnia*, série 4 A, vol. 5, il s'agit d'une seconde version du mémoire « Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires », présenté à l'Académie de Berlin le 7 septembre 1747, publié seulement à titre posthume en 1862, *Opera postuma* 1, Petropoli, 1862, p.269-281 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 19, p. 417-438 (E807).

33. Le mémoire de 1752 est resté inédit jusqu'à la parution en 2008 du volume I/4a des *O.C.*, mais fut publié en 1761 dans une version plus aboutie sous la forme du Mémoire 6 dans le premier tome des *Opuscules* ; la courbe y est discutée p. 189-190. D'Alembert évoque également cette courbe en 1756 dans les *Recherches sur le systême du monde*, t. III, p. 198-199.

34. Lagrange, « Note sur un paradoxe... », *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, 3e pag., p. 142-145 ; *Œuvres* de Lagrange, t. VII, 1877, p. 591-594.

35. Pour la définition de ces intégrales. voir p.ex. H. Poincaré : *Théorie du potentiel newtonien*, Paris, 1899.

potentiel d'une distribution surfacique admet un saut au travers de l'interface[36]. Les mathématiciens actuels diraient aussi volontiers que la surface peut être considérée comme une distribution surfacique de Dirac et l'attraction comme une distribution régulière définie par une fonction discontinue. Physiquement cette configuration n'existe pas mais est utilisée comme approximation d'une couche mince.

AUTRES ŒUVRES DE D'ALEMBERT SUR DES SUJETS LIÉS À CE MÉMOIRE

Avant 1747 *Réflexions sur la cause générale des vents* (*O.C.*, vol. I/5)

1756 *Recherches sur différents points importants du système du monde*, t. III (*O.C.*, vol. I/10)

1757 *Encyclopédie*, t. VII
– art. GRAVITATION

Après 1773 *Opuscules mathématiques*, t. VI (*O.C.*, vol. III/6)
– Mémoire 45 § III : « Eclaircissemens sur deux endroits de mes Ouvrages, qui ont rapport à la Figure de la Terre »

36. W. J. Sternberg, T. L. Smith, *The theory of potential and spherical harmonics*, Toronto, 1944, rev. 1946, p. 140.

HUITIÉME MÉMOIRE.

p. 246

Remarques sur quelques questions concernant l'attraction.

I.

J'AI dit dans mes *Recherches sur la cause générale des Vents*[1], Art. 31, p. 42, que si la Terre eût été un sphéroïde allongé[2], il n'eût pas été nécessaire d'avoir recours, pour expliquer ce phénomene, comme l'ont fait quelques Auteurs, à un noyau intérieur allongé[3] ; & qu'il auroit pû se faire qu'avec un noyau intérieur applati, la Terre eût été allongée vers les pôles. Cette vérité est une suite nécessaire & immédiate des formules que j'ai données au même endroit que je viens de citer. Cependant un Géometre Italien[4], qui a du nom dans les Mathématiques,

---

[1] *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, 1747 ; *O.C.*, vol. I/5.

[2] Voir glossaire : SPHÉROÏDE.

[3] Voir, par exemple, A. Clairaut, *Théorie de la Figure de la Terre*, Paris, 1743. Au § XXXVI, p. 224-225, il écrit : « Si on vouloit expliquer comment une Planete pourroit être allongée, sans que l'équilibre des eaux qui la couvre en fut troublé, on le pourroit facilement à l'aide d'un Noyau intérieur allongé ». Il ne dit cependant pas que cette condition est nécessaire. Quoiqu'il en soit, Clairaut prête peu d'intérêt à l'hypothèse de l'allongement, les observations ayant selon lui prouvé l'aplatissement : voir § LXIX, p. 298-303.

[4] Il s'agit de Boscovich : voir la présentation du Mémoire 8, sect. I. Son traducteur répondra en 1770 : « Nous observerons ici en premier lieu que notre Auteur est Dalmate & de Raguse, non Italien : et c'est pour cela que M. Mazucheli, dans un ouvrage résent sur les Auteurs Italiens, n'en fait aucune mention. Cependant vu le long séjour qu'il a fait en Italie depuis sa première jeunesse, on peut en quelque sorte le dire Italien. » Voir C. Maire et R. J. Boscovich, *Voyage astronomique et géographique*, Paris, 1770, p. 449-450

l'a attaquée par cette considération, que si le noyau intérieur étoit applati, & qu'on dérangeât le fluide extérieur de son état d'équilibre, il n'y reviendroit jamais, au lieu qu'il y reviendroit de lui-même, si le noyau
p. 247 intérieur étoit allongé [5] ; d'où il conclud que / cette derniere hypothèse est la seule propre à rendre raison de l'équilibre.

Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici sur la *Figure de la Terre*, il n'a jamais été question que de l'état d'équilibre ; & que jusqu'à ce Géometre, on n'avoit point encore pensé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état, se rétablît de lui-même. Ainsi, en partant de la maniere ordinaire d'envisager cette question, je ne devois point, ou du moins je n'étois pas obligé à faire entrer cette considération nouvelle dans mon calcul. Cependant, à l'exemple du Géometre dont je viens de parler, je vais y avoir égard, & je prouverai qu'il n'est pas nécessaire, dans cette hypothèse même, que le sphéroïde intérieur soit allongé, pour que la Terre le soit.

Pour ne point répéter ce que j'ai dit ailleurs, je conserverai les mêmes noms que dans l'art. 31 déja cité des *Recherches sur les Vents* ; j'appellerai r le rayon du sphéroïde tant intérieur qu'extérieur, parce qu'on suppose que le fluide qui couvre le noyau intérieur, ait très-peu de hauteur par rapport au rayon de ce noyau [6] ; α' la différence des axes du noyau, α celle du sphéroïde extérieur, φ la force centrifuge à l'équateur, p la pesanteur, Δ la densité du noyau, & δ celle du fluide ; & on aura dans le cas de l'équilibre [7]

$$\frac{\varphi r}{2p}+\frac{3\delta\alpha+3\alpha'(\Delta-\delta)}{5\Delta}-\alpha=0.$$

p. 248 Si cette quantité, au lieu d'être $=0$, est positive ou / négative, c'est-

[5] Il s'agit donc de la question de la stabilité.

[6] D'Alembert étudie l'équilibre d'une couche homogène ellipsoïdale en équilibre hydrostatique, couvrant un solide homogène lui aussi ellipsoïdal : voir la présentation du Mémoire 8, sect. I, « La *Cause des vents* ».

[7] Cette équation exprime l'équilibre hydrostatique de la couche superficielle et s'écrit aussi $\alpha=\dfrac{5\Delta\varphi r/2p+3\alpha'(\Delta-\delta)}{5\Delta-3\delta}$. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. I, « Équilibre de la couche fluide ».

à-dire, si la force perpendiculaire au rayon osculateur, & par conséquent tangente à la courbe, n'est pas nulle, alors il n'y aura point d'équilibre ; & le fluide ne pourra subsister dans cet état, & cherchera nécessairement à en prendre un autre, c'est-à-dire à s'applatir ou à s'allonger. Si la quantité dont il s'agit, est positive, c'est-à-dire, si la force tangentielle est dirigée des pôles vers l'équateur [8], le fluide tendra à s'applatir davantage, ou à s'allonger moins ; si au contraire la quantité est négative, c'est-à-dire, si la force tangente à la courbe est dirigée de l'équateur vers les pôles, le fluide tendra à s'applatir moins ou à s'allonger davantage [9].

Or, pour que l'état d'équilibre soit tel, que si on dérange le fluide de cet état, il le reprenne de lui-même, il faut ; 1°. que si le fluide est allongé & en équilibre, & qu'on le suppose moins allongé, la force qui dans le cas d'équilibre étoit zéro, soit négative dans le cas d'un moindre allongement ; c'est-à-dire, que cette force soit dirigée de l'équateur vers les pôles. Car alors cette force (suivant ce qui vient d'être dit) tendra à remettre le fluide dans un état de plus grand allongement, & par conséquent dans l'état qu'il avoit, lorsqu'il étoit en équilibre. 2°. Il faut au contraire que si le fluide est plus allongé que dans l'état d'équilibre, la force qui étoit $= 0$ dans le cas d'équilibre, soit positive dans le nouvel état d'allongement, c'est-à-dire, dirigée des pôles vers l'équateur, & tendante à diminuer l'allongement du sphéroïde, & à le remettre dans son
p. 249 état d'équilibre. 3°. Par / la même raison, si le fluide est applati, dans le cas d'équilibre, il faut que la force dont il s'agit, soit négative dans le cas d'un plus grand applatissement, & positive dans le cas d'un applatissement moindre.

Donc en général, α' étant la différence des axes dans le noyau intérieur, & cette quantité étant positive ou négative, mais invariable, si nous supposons que α soit la différence des axes du sphéroïde extérieur, dans le cas d'équilibre, laquelle soit aussi positive ou négative, selon que le sphéroïde extérieur sera applati ou allongé ; imaginons que cette

[8] En effet, une positivité de la quantité dont il est question correspond à une augmentation virtuelle de la force centrifuge φ, auquel cas la force tangentielle a le même sens que la force centrifuge.

[9] Ce paragraphe et le suivant constituent une description assez claire de la stabilité.

différence devienne $\alpha+\rho$; ensorte que le fluide, par quelque cause que ce soit, devienne plus ou moins applati, ou bien (ce qui est la même chose) moins ou plus allongé, savoir plus applati ou moins allongé, si ρ est positif, & moins applati ou plus allongé, si ρ est négatif ; on aura ; 1°. puisque le fluide est en équilibre dans le cas où la différence des axes est α, l'équation

$$\frac{\varphi r}{2p}+\frac{3\delta\alpha+3\alpha'(\Delta-\delta)}{5\Delta}-\alpha=0.$$

2°. Dans le cas où $\alpha+\rho$ sera la différence des axes, on aura en substituant $\alpha+\rho$, au lieu de α dans l'expression précédente, une quantité qui devra être négative, si ρ est positif, & positive, si ρ est négatif, de quelque signe que soit d'ailleurs α ; c'est-à-dire que $\dfrac{3\delta\rho}{5\Delta}-\rho$ doit être négative si ρ est positif, & positive si ρ est négatif. Donc 3δ doit être $< 5\Delta$[10].

p. 250 Donc, pour que le fluide reprenne de lui-même son / état d'équilibre, il n'est point nécessaire que le noyau intérieur soit allongé dans le cas où le fluide supérieur le seroit lui-même, il suffit que la densité du fluide soit plus petite que $\frac{5}{3}$ de celle du noyau[11].

---

[10] On dirait de nos jours que D'Alembert procède par perturbation de l'équilibre et montre qu'il y a équilibre instable de la couche fluide si $3\delta-5\Delta>0$. On montre en effet que pour une perturbation de géométrie $d\alpha$ au voisinage d'une position d'équilibre, la perturbation de force tangentielle est donnée par

$$df_T=(3\delta-5\Delta)\frac{|\sin 2\theta|}{5\delta r}pd\alpha\ ;$$

voir la présentation du Mémoire 8, sect. I, « Stabilité de la couche fluide ». Le signe de df_T ne dépend pas de α' mais du signe de $3\delta-5\Delta$. Si $3\delta-5\Delta>0$, une augmentation d'aplatissement implique une force dirigée vers l'équateur et l'équilibre est donc instable.

[11] En réalité, dans le cas où $3\delta-5\Delta<0$, on ne démontre pas ainsi la stabilité. Il faudrait pour cela démontrer la stabilité à *toute* perturbation alors que D'Alembert ne la montre que vis-à-vis des perturbations de forme elliptique.

II.

Une nouvelle considération va achever de mettre dans le plus grand jour ce que nous venons de dire. Nous avons démontré, p. 43 des *Recherches sur la cause générale des Vents*, que si on fait $5\Delta = 3\delta - f$, on aura

$$\alpha = \frac{\dfrac{\varphi r}{2p} - \dfrac{\alpha'}{5}\left(2 + \dfrac{f}{\Delta}\right)}{\dfrac{-f}{5\Delta}}.$$

D'où l'on voit que si le fluide est en repos, & ne tourne pas, c'est-à-dire, si la forge centrifuge φ est nulle, on aura $\alpha = \dfrac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$. Supposons à présent que le fluide tourne ; il est évident que cette rotation doit tendre à l'applatir davantage ou à l'allonger moins ; donc $\dfrac{\varphi r \cdot 5\Delta}{-2pf}$ doit être une quantité positive, de quelque signe que soit d'ailleurs la quantité $\dfrac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$ qui exprime la différence des axes dans le cas de $\varphi = 0$. Donc f doit être négative, c'est-à-dire, que 5Δ doit être plus grand que 3δ ; précisément comme on l'a vû ci-dessus.

Si le noyau intérieur étoit allongé, ensorte que α' fût négatif, & si de
p. 251 plus f étoit positif, c'est-à-dire, que 5Δ / fût plus petit que 3δ, alors φ étant $= 0$, le sphéroïde extérieur seroit allongé, puisqu'alors $\dfrac{\alpha'(2\Delta + f)}{f}$ seroit négatif ; mais si on suppose qu'en cet état d'équilibre, le sphéroïde vienne à tourner, il tendra à devenir moins allongé par la rotation ; au lieu qu'il doit l'être davantage pour qu'il y ait équilibre, puisque f étant positif, la quantité $\dfrac{\varphi r \cdot 5\Delta}{-2pf}$ est négative[12].

---

[12] D'après ce que nous comprenons, d'une part « il est évident » pour D'Alembert que faisant tourner une configuration initialement au repos elle doit avoir tendance à s'aplatir, d'autre part que cela n'a lieu que si $5\Delta > 3\delta$. Dans le cas contraire une rotation

Ainsi, dans le cas où la Terre seroit un sphéroïde allongé, l'hypothèse d'un noyau intérieur solide & allongé ne seroit pas plus avantageuse pour expliquer cet allongement, que celle d'un noyau intérieur solide & applati, si f étoit positive, c'est-à-dire, si 5Δ étoit $< 3\delta$.

Ce n'est donc point la figure du noyau intérieur, comme le Mathématicien dont nous avons parlé semble l'avoir cru[13], qui empêche que l'équilibre troublé ne se rétablisse, ou qui contribue à le rétablir ; c'est le rapport de la densité du fluide extérieur à la densité du noyau ; si la densité δ du fluide est $< \frac{5}{3}$ de la densité Δ du noyau, l'équilibre dérangé se rétablira de lui-même ; si elle est plus grande, l'équilibre une fois dérangé ne pourra se rétablir.

Cet équilibre se rétablira donc, quand même la densité δ du fluide supérieur seroit plus grande que celle du noyau, pourvû qu'elle fût $< \frac{5}{3}$
p. 252 de cette densité du / noyau. Il est vrai que la plûpart de ceux qui ont traité de la figure de la Terre, ont supposé que δ devoit toujours être $< \Delta$, les couches les plus voisines du centre, devant selon eux, être les plus denses[14]. Mais cela n'est nullement nécessaire[15]. Voyez mes *Recherches sur le Systême du Monde, Troisiéme Partie*, p. 187 & 188[16].

---

tend à allonger l'ellipsoïde vers les pôles ; D'Alembert ne semble pas considérer ce cas comme un paradoxe mais comme un cas impossible. Notons que le paradoxe apparent vient du fait que pour $5\Delta < 3\delta$ le fluide est instable : une perturbation de l'état sphérique par la rotation ne l'entraîne donc pas vers une configuration d'équilibre. Physiquement, une telle configuration ne peut donc subsister.

[13] Il s'agit de Boscovich : voir la présentation du Mémoire 8, sect. I.

[14] Par exemple A. Clairaut, *La Figure de la Terre*, Paris, 1743, introduction, p. xxiij : « mais il est très-possible que les parties les plus proche du centre soient plus denses que les autres, & cela est même très-vraisemblable ». Dans la suite de l'ouvrage Clairaut en déduit quelques résultats intéressants, notamment à l'article LXV, p. 293-295, où il indique que l'aplatissement est inférieur à la valeur 1/230 trouvée dans l'hypothèse d'homogénéité. Voir aussi note suivante.

[15] Mais c'était de plus en plus admis : voir la présentation du Mémoire 8, sect. I, « Modèle de densité de la Terre ».

[16] D'Alembert, *Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, t. III, Paris, 1756 ; *O.C.*, vol. I/10. Dans les deux pages citées, D'Alembert

III.

Dans le même Ouvrage déja cité, *sur la cause générale des Vents*[17], il s'est glissé une erreur de calcul qui n'influe en rien sur le reste de la Dissertation ; mais qui étant corrigée, donne lieu à un résultat curieux & important[18]. Je suppose ici, pour ne point me répéter, qu'on ait l'Ouvrage devant les yeux[19] ; il faudra réformer ainsi la fin de la

---

indique qu'un des résultats de Clairaut reste valable quelle que soit l'hypothèse qu'on fasse sur la densité.

[17] D'Alembert, *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, 1747 ; *O.C.*, vol. I/5.

[18] Il pense très probablement à l'existence possible de configurations d'équilibre ellipsoïdales à trois axes inégaux (avec un noyau), résultat qui n'apparaissait pas dans la *Cause des Vents*. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. II.

[19] Voir la présentation du Mémoire 8, sect. II, pour le contexte. Rappelons ici les notations essentielles. D'Alembert examine si un ellipsoïde fluide de densité δ à trois axes inégaux proche de la sphère peut être en équilibre. La condition d'équilibre qu'il écrit est que l'attraction soit orthogonale à tout déplacement élémentaire sur la surface. Les trois demi-axes de l'ellipsoïde (fig. 44) ont pour longueurs $CO = r$, $CK = r - \alpha$ et $CY = r - \alpha - \beta$ avec α et $\beta \ll r$. Soit un point M à la surface de l'ellipsoïde, D'Alembert le positionne à l'aide des trois quantités suivantes : la distance CM, l'angle TCM, et l'angle KCT (nous appellerons quant à nous ces quantités *rayon*, *latitude* et *longitude* de M). Une variation de ces quantités correspond à trois directions sur lesquelles D'Alembert donne la valeur de l'attraction de l'ellipsoïde. Ecrivons comme lui $z = r\sin(TCM)$ et $A' = r\sin(KCT)$, et donnons un nom aux trois composantes de l'attraction, par exemple g_r, g_{lat}, g_{lon}. En corrigeant une erreur d'impression sur la troisième relation dans la *Cause des vents*, elles peuvent alors s'écrire

$$
\begin{aligned}
g_r &= \frac{4\pi\delta r}{3},\\
g_{lat} &= \frac{4\pi\delta r}{3}\left(\frac{6\alpha}{5r} + \frac{6\beta}{5r}\frac{A'^2}{r^2}\right)\frac{z\sqrt{r^2 - z^2}}{r^2},\\
g_{lon} &= \frac{4\pi\delta r}{3}\frac{A'\sqrt{r^2 - A'^2}}{r^2}\frac{6\beta}{5r}\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}.
\end{aligned}
$$

D'Alembert considère ensuite deux déplacements sur le sphéroïde : un premier dans le plan TCM, un second dans le plan MCZ où Z est tel que CZ est orthogonal à CT et à OC. Notons dM_r, dM_{lat} les composantes du premier déplacement, et $d'M_r$, $d'M_{lat}$, $d'M_{lon}$ celles du deuxième. D'Alembert indique que $d'M_{lat}$ est négligeable et forme les deux rapports $k = -\dfrac{dM_r}{dM_{lat}}$ et $k' = -\dfrac{d'M_r}{d'M_{lon}}$. L'attraction est orthogonale à la surface si $\dfrac{g_{lat}}{g_r} = k$ et $\dfrac{g_{lon}}{g_r} = k'$. En pages 155 et 156 de la *Cause des vents*, D'Alembert avait page 155, & le commencement de la suivante. « Si on fait tourner l'ellipse OMT (*fig.* 44.) sur OC, le plan MCZ demeurant immobile [20] ; CT deviendra [21]

$$r - \alpha - \frac{\beta A'^2 + 2\beta A' dA'}{rr},$$

& z ne changera que d'une quantité infiniment petite du second ordre [22] ; d'où il s'ensuit que CM dans sa premiere position étant [23]

$$r + \left(\alpha + \frac{\beta A'^2}{rr}\right) \frac{zz - rr}{rr},$$

montré que ces égalités ne sont pas réalisées. Il reprend ici le calcul de k', qui était faux. L'erreur porte sur la dernière équation de la page 155.

[20] Il considère ici un déplacement à la surface de l'ellipsoïde et dans le plan MCZ.

[21] Nous avons corrigé cette expression écrite initialement

$$r - \alpha \frac{-\beta A'^2 - 2\beta A' dA'}{rr}.$$

Il s'agit de CT après un déplacement infinitésimal en longitude où A' devient $A' + dA'$. En effet, l'équation paramétrée par l'angle KCT, d'une ellipse de demi-grand axe $r - \alpha$ et de demi-petit axe $r - \alpha - \beta$, s'écrit au premier ordre en α/r et β/r :

$$CT = r - \alpha - \beta \sin^2(KCT) = r - \alpha - \beta \frac{A'^2}{r^2}.$$

[22] En effet, CZ étant perpendiculaire à CT, la courbe donnée par l'intersection du plan MCZ et de l'ellipsoïde est quasiment tangente au petit cercle de latitude correspondant ; ainsi un petit déplacement sur cette courbe ne fait changer la latitude qu'au second ordre. Dans la suite on considère donc, comme le fait implicitement D'Alembert, que seuls le rayon et la longitude varient ce qui simplifie grandement les calculs.

[23] On passe de CT à cette expression de CM en développant l'équation de l'ellipse méridionnale au premier ordre en α et β et en remarquant que $\cos(TCM) = 1 - \frac{z^2}{r^2}$. Il suffit alors de différencier cette expression de CM en fonction d'un déplacement infinitésimal en longitude et de former

$$k' = -\frac{d(CM)}{dA'} \times \frac{\sqrt{r^2 - A'^2}}{\sqrt{r^2 - z^2}},$$

ce que D'Alembert fait dans les équations qui suivent.

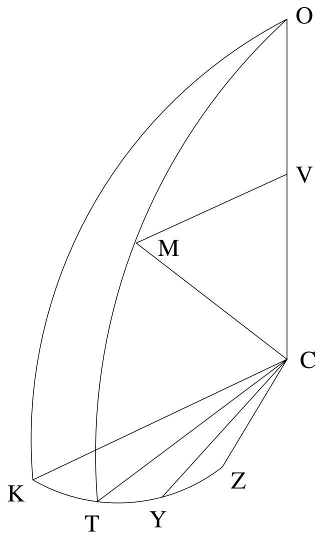

Fig. 44 [24]

elle sera dans sa seconde position

$$r+\left(\alpha+\frac{\beta A'^2}{rr}+\frac{2\beta A'dA'}{rr}\right)\left(\frac{zz-rr}{rr}\right)\ ;$$

enfin l'angle entre la ligne CM dans sa premiere position, & la ligne CM
p. 253 dans sa position nou-/velle, sera à l'angle [25]

$$\frac{rdA'}{\sqrt{rr-A'A'}}::\sqrt{rr-zz}:r\ ;$$

de-là il s'ensuit que $k'=\dfrac{2\beta A'dA'(rr-zz)}{r^4}$ divisé par

$$\frac{dA'\sqrt{rr-zz}}{\sqrt{rr-A'A'}}=\frac{2\beta A'\sqrt{rr-A'A'}}{r^3}\times\frac{\sqrt{rr-zz}}{r}.$$

[24] La figure est approximative puisque les axes CK et CY sont en réalité orthogonaux, de même que les axes CT et CZ.

[25] L'expression « $a:b::c:d$ » se lit « a est à b comme c est à d », ce qui implique $a/b=c/d$.

Donc k' n'est pas égal à

$$\frac{6\beta A'\sqrt{rr-A'A'}}{5rr}\times\frac{\sqrt{rr-zz}}{r^2}.$$

Ainsi un sphéroïde qui n'est pas un solide de révolution, & qui est par-tout de la même densité, ne sauroit être en équilibre.

Si le solide proposé n'est pas par-tout de la même densité, mais qu'il renferme un noyau dont C soit le centre, & dont les rayons r', $r'-\alpha'$, $r'-\alpha'-\beta'$ soient peu différens des rayons correspondans CO, CK, CY ; alors nommant p la force ou pesanteur en M suivant MC, & Δ la densité du noyau intérieur, on aura $p =$ à peu près $\dfrac{4n\Delta r}{3}$; & on trouvera que la force perpendiculaire au rayon CM, dans le plan $OMTC$, est [26]

$$\left(\frac{4n\delta r}{3}\times\left[\frac{6\alpha}{5r}+\frac{6\beta A'^2}{5r^3}\right]+\left[\frac{4n\Delta r-4n\delta r}{3}\right]\times\left[\frac{6\alpha'}{5r}+\frac{6\beta' A'^2}{5r^3}\right]\right)$$

$$\times\frac{z\sqrt{rr-zz}}{rr}\quad;$$

or le rapport de cette force à la force p sera égal à k, si

$$\delta\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta A'^2}{r^3}\right)+(\Delta-\delta)\left(\frac{\alpha'}{r}+\frac{\beta' A'^2}{r^3}\right)=\frac{5\Delta}{3}\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta A'^2}{r^3}\right)\ :\ /$$

p. 254 & comme cette équation doit avoir lieu, quel que soit A', il s'ensuit que cette équation donne séparément les deux suivantes ;

1°. $\dfrac{\delta\alpha}{r}+(\Delta-\delta)\dfrac{\alpha'}{r}=\dfrac{5\Delta\alpha}{3r}$, ou $\alpha=\dfrac{(\Delta-\delta)\alpha'}{\dfrac{5\Delta}{3}-\delta}$;

2°. $\dfrac{\delta\beta}{r^3}+(\Delta-\delta)\dfrac{\beta'}{r^3}=\dfrac{5\Delta\beta}{3r^3}$, ou $\beta=\dfrac{(\Delta-\delta)\beta'}{\dfrac{5\Delta}{3}-\delta}$.

[26] Pour trouver les trois composantes de la force, il suffit de reprendre les expressions des trois composantes de l'attraction (voir note [19]) et de remarquer que l'attraction du sphéroïde est la somme des attractions d'un ellipsoïde de densité δ et d'un ellipsoïde intérieur de densité $\Delta-\delta$.

A l'égard de la force perpendiculaire à CM dans le plan MCZ, elle sera

$$\frac{6A'\sqrt{rr - A'A'} \cdot \sqrt{rr - zz}}{5r^3} \times \left[\frac{4n\delta r}{3} \times \beta + \frac{(4n\Delta r - 4n\delta r)}{3} \times \beta'\right] ;$$

& le rapport de cette force à p sera égal à k', si

$$\frac{\sqrt{rr - zz}}{5r} \times \left[\frac{\delta\beta + (\Delta - \delta)\beta'}{\Delta}\right]$$

est égal à $\dfrac{\beta\sqrt{rr - zz}}{3r}$; d'où l'on tire $\beta = \dfrac{(\Delta - \delta)\beta'}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; équation que la premiere condition a déja donnée.

Ainsi, pour que le sphéroïde soit en équilibre en vertu de la seule attraction de ses parties, ce sphéroïde n'étant pas d'ailleurs un solide de révolution, il faut ; 1°. que $\dfrac{\alpha}{\alpha'}$ soit $= \dfrac{\beta}{\beta'}$, c'est-à-dire que le noyau & le sphéroïde soient semblables [27] ; 2°. que $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{3\Delta - 3\delta}{5\Delta - 3\delta}$. On voit aussi que si α' et β' sont égaux à zéro, c'est-à-dire si le noyau intérieur est sphé-
p. 255 rique, & / que de plus $5\Delta = 3\delta$, α & β pourront être tout ce qu'on voudra, pourvû qu'on les suppose très-petits. Dans ce seul cas le sphéroïde extérieur pourra être de telle figure qu'on voudra, pourvû qu'il différe peu d'une sphère ; & c'est le seul cas où il ne doit pas être semblable au noyau intérieur [28]. »

---

[27] En fait l'égalité $\alpha/\alpha' = \beta/\beta'$ n'indique pas que les ellipsoïdes soient *semblables*, ce terme ayant à l'époque le même sens qu'actuellement (homothétiques à une rotation près ; voir article SEMBLABLES, *Enc.*, t. XIV, p. 936b-937a) ; les ellipsoïdes seraient semblables si et seulement si

$$\frac{r}{r'} = \frac{r - \alpha}{r' - \alpha'} = \frac{r - \alpha - \beta}{r' - \alpha' - \beta'},$$

c'est-à-dire (puisque $r \simeq r'$) si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

[28] Cette conclusion ne nous parait pas claire. Il nous semble que l'équilibre peut toujours être réalisé puisqu'il existe un unique couple α, β, sauf dans le cas particulier $5\Delta = 3\delta$ où l'équilibre n'est réalisé que si le noyau est sphérique.

La correction commencée p. 252 vers le début de la partie III s'arrête ici. Dans l'original, les guillemets ont été fermés par erreur au milieu de la partie IV juste après $\dfrac{\alpha}{\alpha'}$.

IV[29].

Si le sphéroïde tourne autour de l'axe OC, il en résultera une force suivant[30] $VM = \frac{\varphi \cdot VM}{CK}$, φ étant la force centrifuge en K ; & comme on suppose φ très-petite par rapport à p, cette force suivant VM sera $= \frac{\varphi\sqrt{rr-zz}}{r}$; & la force perpendiculaire au rayon CM dans le plan $OMTC$ devra être diminuée de la quantité $\frac{\varphi z\sqrt{rr-zz}}{rr}$. Quant à la force perpendiculaire à CM dans le plan MCZ, elle ne recevra aucune altération ; ainsi il n'y aura d'autres changemens à faire dans les calculs précédens, que de transformer l'équation

$$\frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r} = \frac{5\Delta\alpha}{3r},$$

en celle-ci

$$-\frac{5\varphi\Delta}{6p} + \frac{\delta\alpha}{r} + (\Delta - \delta)\frac{\alpha'}{r} = \frac{5\Delta\alpha}{3r},$$

ou[31]

$$\alpha = \frac{-\frac{\varphi r}{2p} + \frac{3\alpha'(\Delta-\delta)}{5\Delta}}{1 - \frac{3\delta}{5\Delta}} \;;$$

p. 256 à / l'égard de la valeur de $\frac{\beta}{\beta'}$, elle sera la même que dans l'Art. précédent, savoir $\frac{\Delta - \delta}{\frac{5\Delta}{3} - \delta}$; mais elle ne sera plus égale à $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

---

[29] Cette partie augmente l'addition française à la *Cause des vents* dans laquelle la force centrifuge n'apparaissait pas. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. II.

[30] Par linéarité de la force centrifuge avec la distance à l'axe.

[31] Dans l'original de la formule suivante, il y avait 3Δ au lieu de 3δ ; nous avons corrigé ici cette erreur signalée dans la page d'errata.

Il est donc évident ; 1°. que l'on peut avoir (même en supposant un mouvement de rotation) un sphéroïde dont les coupes par l'axe ne soient, ni semblables, ni égales, & qui soit néanmoins en équilibre, pourvû qu'il y ait au centre un noyau, dont la densité soit différente de celle de la surface ; 2°. que dans ce sphéroïde la quantité β dépendra de la seule quantité β', & la quantité α de la seule quantité α', sans que α dépende de β', ni β de α' ; 3°. que la valeur de α sera la même que si β' étoit $= 0$, c'est-à-dire, si le noyau intérieur étoit sphérique[32]. Car cette valeur est la même que la valeur

$$\frac{\dfrac{\varphi r}{2p} + \dfrac{3\alpha'}{5}\left(\dfrac{\Delta - \delta}{\Delta}\right)}{1 - \dfrac{3\delta}{5\Delta}}$$

qu'on a trouvé p. 42 de l'Ouvrage cité[33] pour le cas d'un noyau sphérique. La seule différence vient de ce que dans l'endroit cité, on regardoit α & α' comme positives, c'est-à-dire le sphéroïde & le noyau comme applatis ; au lieu qu'ici on regarde le sphéroïde & le noyau comme allongés ; & par conséquent α & α' comme négatives.

p. 257 Ainsi la dissimilitude des méridiens[34] n'empêcheroit point / que la direction des graves ne pût être perpendiculaire à la surface de la Terre en un point quelconque. Nous avons fait voir de plus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1754[35], que cette dissimilitude ne nuisoit

---

[32] $\beta' = 0$ indique seulement que le noyau est à symétrie de révolution et non sphérique. La même imprécision est répétée à la phrase suivante. D'Alembert écrit d'ailleurs dans l'*Avertissement* (p. vij-viij) : « 2°. Que la Terre, même en la supposant en partie fluide, pourroit subsister sans être un solide de révolution, pourvû qu'elle eût un noyau intérieur solide, qui ne fût pas un solide de révolution, & et qui fût d'une densité différente de la partie fluide. »

[33] Il s'agit de la *Cause des vents*. Comme indiqué à la phrase suivante, du fait des conventions choisies, il faut changer α et α' en $-\alpha$ et $-\alpha'$ pour trouver la même expression que dans la *Cause des vents*.

[34] C'est-à-dire la non symétrie de révolution de la Terre. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. II, « Dissimilitude des méridiens ».

[35] D'Alembert, « Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans l'hypothèse de la dissimilitude des méridiens », *MARS* année 1754 (1759), p. 413-428 ; *O.C.* vol. III/10.

point non plus aux phénomenes de la *Précession des Equinoxes*. Nous avons enfin prouvé dans la troisiéme Partie de nos *Recherches sur le systême du Monde*[36], que les observations ne fournissent pas des argumens suffisans en faveur de la similitude parfaite des méridiens. Donc la dissimilitude[37] des méridiens de la Terre n'est jusqu'ici prouvée, ni par la théorie, ni par les observations.

V.

Dans l'Art. *Gravitation*[38] de l'Encyclopédie, & dans la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le systême du Monde*[39], p. 198 & 199, j'ai remarqué qu'un point placé sur une surface sphérique, éprouve de la part de cette surface, une attraction qui n'est que la moitié de celle qu'éprouveroit ce même point, placé au-delà de cette même surface à une si petite distance qu'on voudroit, pourvû que cette distance ne fût pas $= 0$. J'ai essayé dans les mêmes endroits cités, & sur-tout dans l'Art. *Gravitation*, de rendre raison de ce paradoxe, en analysant & en décomposant, pour ainsi dire, le calcul par lequel on trouve la gravitation d'un point vers une surface sphérique. A cette analyse j'ajouterai ici quelques réfléxions. /

p. 258 Soit A (*fig*. 45.) le point attiré, $BC = r$ le rayon de la surface attirante, $AB = n$, $BM = x$, π le rapport de la demi-circonférence au rayon ; la différentielle de l'attraction sera[40] $\dfrac{2\pi r(n+x)dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$; cette

[36] D'Alembert, *Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, t. III, Paris, 1756, Livre VI, chapitres I à III ; *O.C.*, vol. I/10.

[37] Il y avait « similitude » au lieu de « dissimilitude » sur l'original ; nous avons corrigé ici cette erreur signalée dans la page d'errata.

[38] *Enc.*, t. VII, 1757, p. 871a-873a.

[39] *Op. cit.*

[40] Nous avons corrigé le numérateur, écrit $2\pi rx(n+x)dx$ dans l'imprimé original.
Cette différentielle est la composante centrale de l'attraction puisqu'elle vaut $dS/AN^2 \cos(\widehat{CAN})$ où dS est l'élément de surface de la couronne passant par M et d'extension $dx = dM$. En effet, par application du théorème de Pythagore

différentielle est composée de deux parties, savoir $\dfrac{2\pi rndx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$, & $\dfrac{2\pi rxdx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$. Or il est d'abord évident, que quand $n=0$, la premiere différentielle s'évanouit, & que si n n'est pas $=0$, l'intégrale[41] de cette premiere différentielle est

$$\frac{2\pi rn}{n+r}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right),$$

laquelle (en supposant n infiniment plus petite que r) se réduit à

$$\frac{2\pi rn}{r}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)=2\pi AB\times\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{AN}\right):$$

& si le point N tombe en D, l'intégrale deviendra

$$2\pi AB\times\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}\right),$$

qui se réduit à 2π, parce que $\dfrac{1}{AD}$ peut être négligé par rapport à $\dfrac{1}{AB}$. On voit donc comment une différentielle qui est $=0$ aussi-bien que son intégrale, lorsque $n=0$, peut devenir finie, en supposant n si petite qu'on voudra, pourvû qu'elle ne soit pas $=0$[42]. J'avois déja fait cette remarque dans l'art. *Gravitation*[43] de l'Encyclopédie ; & M. de la

---

$AN^2=AM^2+MN^2=n^2+2nx+2rx$. Le cosinus intervient car seule la partie de l'attraction portée par CA n'est pas annulée par la symétrie de révolution ; il s'écrit

$$\cos(\widehat{CAN})=\frac{AM}{AN}=\frac{(n+x)}{\sqrt{n^2+2nx+2rx}}.$$

L'élément de surface s'écrit $dS=2\pi MNdN$, où dN est un élément de longueur sur le cercle. La relation $MN\ dN=rdx$ se montre soit géométriquement en constatant que MN/r et dx/dN sont tous deux égaux à la tangente du même angle $\theta=\widehat{MCN}$, soit analytiquement en passant aux coordonnées polaires :
$MNdN=r\sin\theta rd\theta=-rd(r\cos\theta)=rdx$.

[41] Intégrale pour x allant de 0 à x.

[42] En termes modernes, la première fonction à intégrer,

$$f(x,n)=\frac{2\pi rn}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}},$$

est définie et continue partout sauf au point $(x,n)=(0,0)$ où elle est infinie. Les

Grange l'a faite aussi depuis dans le premier Volume des *Mémoires de*
p. 259 *l'Académie des Scien-/ces de Turin*[44]. M. de la Grange remarque de plus, avec raison, que si AB est négatif, l'intégrale qui étoit 2π dans le cas de AB positif, devient alors[45] $= -2\pi$. Ainsi voilà une quantité Algébrique qui, dans le cas de n positive, & si petite qu'on voudra, est $= 2\pi$, qui dans le cas de $n = 0$ est $= 0$, & qui dans le cas de n négative & si petite qu'on voudra, devient $= -2\pi$.

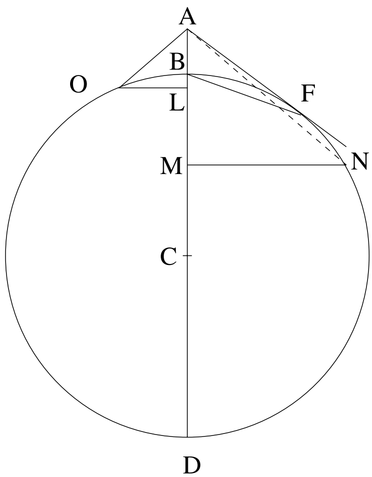

Fig. 45

---

théorèmes classiques donnant la continuité de la fonction $I(n) = \displaystyle\int_0^{2r} f(x,n)dx$ ne s'appliquent donc pas. D'Alembert indique que la valeur $I(0) = \displaystyle\int_0^{2r} f(x,0)dx$ est néanmoins définie et vaut 0, et la fonction est discontinue en ce point puisque $I(0^+) = 2\pi$ et $I(0^-) = -2\pi$. Voir également la présentation du Mémoire 8, sect. III.

[43] *Enc.*, t. VII, 1757, p. 871a-873a.

[44] Lagrange, « Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque », *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, 3e pag., p. 142-145. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. III, « L'attraction est discontinue ».

[45] En effet si l'on tient compte du fait que $n = AB$ peut être négatif, la relation de la page 258 s'écrit plus généralement

$$\frac{2\pi rn}{r}\left(\frac{1}{|n|} - \frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right) = 2\pi AB \times \left(\frac{1}{|AB|} - \frac{1}{|AN|}\right).$$

Pour adoucir (si je puis parler ainsi) cette espèce de paradoxe, d'une quantité qui s'évanouit tout-à-coup sans avoir passé auparavant par des diminutions successives, j'avois apporté dans *mes Recherches sur le systême du Monde*, p. 199, III. Partie, l'exemple de la courbe[46] $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$, qui, comme M. Euler l'a remarqué, perd subitement un diametre[47] lorsque $b = 0$. M. de la Grange m'objecte que cet exemple n'est pas analogue au précédent, parce que dans le cas de $b = 0$, la courbe est composée d'un systême de deux courbes différentes, lequel systême conserve un diametre[48]. J'en conviens, & je ne l'ignorois pas ; aussi n'ai-je apporté cet exemple que pour montrer que ce qu'on appelle la *Loi de continuité* (dans quelque sens qu'on prenne ce mot) ne s'observe pas toujours dans les quantités Algébriques. Car il est d'ailleurs facile d'apporter un exemple plus direct, & plus analogue à celui dont il s'agit.

---

[46] Lire $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$.

[47] Voir glossaire : DIAMÈTRE.

[48] D'Alembert introduit également cet exemple de courbe au Mémoire 6. Voir la présentation du Mémoire 8, sect. III, « Les courbes $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$ ». On y trouvera aussi les références au débat entre D'Alembert, Euler et Lagrange.

Les courbes $y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{a^3(x+b)}$ sont les solutions de l'équation du 8e degré

$$P(x,y) = \left(y^4 + 6axy^2 + a^2x^2 - a^3(x+b)\right)^2 - 16axy^2\left(y^2 + ax\right)^2 = 0.$$

L'axe $y = 0$ est un diamètre puisque y apparait au carré. Comme l'indique Lagrange, quand $b = 0$, P se factorise en $P = Q_+Q_-$ avec

$$Q_\pm(x,y) = y^4 - 2axy^2 \pm 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x$$

(en corrigeant l'erreur d'impression dans la note de Lagrange). Ce qui était une courbe devient alors, selon la terminologie de Lagrange, un *système* de deux courbes. Aucune de ces courbes n'admet un diamètre mais le système des deux a toujours $y = 0$ comme diamètre.

Le problème soulevé par D'Alembert vient du fait que, pour faire disparaitre les radicaux dans le cas $b = 0$, il suffit d'élever au 4e degré. D'Alembert part de $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$ au lieu de $y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{a^3(x+b)}$ et il trouve $Q_-(x,y) = 0$ au lieu de $Q_+(x,y) = 0$ *et* $Q_-(x,y) = 0$. Le paradoxe apparent provient donc au moins en partie de l'ambiguité de la notation $\sqrt{x}$: on hésitait encore entre lui attribuer la valeur $\sqrt{x}$ ou les valeurs $\pm\sqrt{x}$.

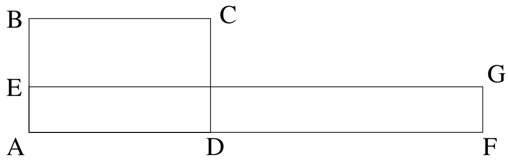

Fig. 46

Soit AC (*fig*. 46.) un quarré dont le côté $AB = b$; & soit $AE = n$, & $AF = \dfrac{bb}{n}$; il est clair que tant que AE ne sera pas $= 0$ absolu, la surface
p. 260 $AEGF$ sera $= bb$; / mais quand $AE = 0$, il n'y aura plus de surface, & $AEGF$ sera $= 0$; la surface se réduisant alors à une ligne droite [49].

Cette derniere maniere d'expliquer le paradoxe en question, me paroît, si je l'ose dire, plus lumineuse & plus simple que celle de M. de la Grange, qui mérite que je m'y arrête un moment. La différence finie entre les attractions, lorsque $n = 0$, & lorsque n est finie & si petite qu'on voudra, dépend selon lui, « du point de la surface B (*fig*. 45.) qui exerce une force finie, & $= 2\pi$ sur le point A, lorsque l'on fait évanouir leur distance AB. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à réfléchir qu'un point de surface est nécessairement un infiniment petit du second ordre [50], & que la fonction AB^2 de la distance évanouissante devient aussi infiniment petite du même ordre ; d'où il s'ensuit que l'attraction du point [51] B (qui est proportionnelle à ce point divisé par la fraction donnée) deviendra finie, & on peut s'assurer d'ailleurs que cette attraction sera $= 2\pi$. Ceci posé, quand on fait venir le point A à la surface de dehors, on

[49] Une suite de surfaces peut donc ne pas tendre vers une surface. Cet exemple de surface dont la largeur tend vers 0 tout en gardant une « intégrale » constante est une illustration possible de la notion moderne de distribution de Dirac.

[50] Un « point de surface » est donc un élément de surface. Mais Lagrange ne dit pas comment il choisit cet élément de surface et il est donc difficile de savoir en fonction de quelle quantité l'élément de surface est du second ordre. C'est l'objet de la discussion de D'Alembert dans les pages qui suivent. La suite du calcul montre que Lagrange considère implicitement une surface dont le rayon est beaucoup plus grand que la distance du point attiré à la surface ($OB \gg AB$) : voir figure 45 et notes [53] et [54].

[51] Nous avons corrigé à trois reprises A par B. La note de Lagrange était, elle, correcte, mais A était le point attirant et B le point attiré, ce qui explique certainement ces erreurs de transcription.

a l'attraction $= 4\pi$, qui est composée de l'attraction 2π du point B, & de l'autre partie 2π qui doit nécessairement exprimer l'attraction du reste de la surface. Mais si l'on fait que le point A vienne toucher la surface au-dedans, alors l'attraction 2π du point B devra agir en sens contraire, & jointe avec l'autre partie 2π qui agit dans le même sens qu'auparavant,
p. 261 donnera $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'attraction dans ce cas ; / enfin si le point est d'abord placé sur la surface en B, on exclut dans ce cas l'attraction du point de surface B, & on a seulement 2π pour l'attraction totale, comme le donne le calcul. »

1°. Je n'entends pas la distinction que veut mettre M. de la Grange, entre un point qui *touche une surface en dehors*, un point qui est *placé sur cette surface*, & un point *qui la touche en-dedans*. Car, comme une surface n'a point de largeur, un point qui coincide avec une surface, ne la touche proprement ni *en-dedans*, ni *en-dehors*, ou, si l'on veut, la touche en-dedans & en-dehors tout-à-la-fois ; & un point qui ne coincide pas avec la surface, ne la touche point. Cette notion de la surface est adoptée de tous ceux qui connoissent les Elémens de Géométrie, & je ne vois point ce qu'on peut y opposer.

2°. Si par les mots de *toucher en-dedans* ou *en-dehors*, M. de la Grange veut dire, être placé à une distance infiniment petite en-dedans ou en-dehors, alors l'expression s'entend ; mais je ne conviens pas de ce que prétend l'Auteur, que le point de surface B, qui est *nécessairement un infiniment petit du second ordre*, exerce sur le point A une attraction finie & $= 2\pi$. Car 1°. pourquoi faut-il *nécessairement* regarder le point B de la surface comme un infiniment petit du second ordre ? Ce point B n'est qu'un point sans étendue, incomparable en lui-même à quelque surface que ce soit. 2°. Si au lieu du point B on substitue en effet une surface circulaire, réellement infiniment petite du second
p. 262 ordre, dont l'abs-/cisse soit BL, & le rayon BO, on trouvera facilement (voyez l'Article *Gravitation* de l'Encyclopédie), que l'attraction de cette surface est[52]

---

[52] Nous avons corrigé le premier numérateur, qui était écrit $2\pi r(nn + nr)$.
Cette relation est exacte indépendamment du fait que la surface attirante soit « réellement infiniment petite du second ordre ». En effet, en intégrant la différentielle de l'attraction, on trouve bien, si $n \neq 0$:

$$\frac{2\pi r(nn+2nr)}{(2n+2r)^2}\times\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)$$
$$+2\pi r\times\left(\frac{2\sqrt{nn+2nx+2rx}-2n}{(2n+2r)^2}\right)$$

qui se réduit (à cause de n infiniment petite) à

$$2\pi n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{nn+2nx+2rx}}\right)+\frac{\pi}{r}\times\left(\sqrt{nn+2nx+2rx}-n\right),$$

ou[53] $2\pi-\dfrac{2\pi\cdot AB}{AO}+\dfrac{\pi(AO-AB)}{r}=2\pi-\dfrac{2\pi\cdot AB}{AO}$, parce que

---

$$\int_0^x\frac{2\pi r(n+x)dx}{(nn+2nx+2rx)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{\pi r}{(n+r)^2}\left[n(n+2r)\left(\frac{1}{|n|}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2(n+r)x}}\right)+\sqrt{n^2+2(n+r)x}-|n|\right],$$

cela pour tout $x\in[0,2r]$.

[53] L'intégrale de la note [52] donnant l'attraction d'une calotte sphérique finie s'écrit en effet pour $0<|n|=|AB|\ll r$:

$$I'=2\pi\frac{AB}{|AB|}-2\pi\frac{AB}{|AO|}+\pi\frac{|AO|}{r}.$$

Le premier terme vaut 2π ou -2π suivant que A soit à l'extérieur ou à l'intérieur et représente l'attraction du voisinage de B. C'est aussi l'attraction d'un plan infini. Le troisième terme varie de 0 à 2π quand O varie de B au point diamétralement opposé et représente l'attraction du reste de la sphère. Il est absent de l'expression donnée par D'Alembert puisque celui-ci se place d'emblée dans le deuxième cas d'une surface infiniment petite ($O\simeq A$). Le deuxième terme est l'objet du désaccord avec Lagrange. Ce terme est indéterminé si l'on fait tendre A et O vers B, la limite du rapport dépendant de la façon dont ces points tendent vers B ; on a en effet $\lim\limits_{O\to B}\lim\limits_{A\to B}I'=\pm2\pi$ alors que $\lim\limits_{A\to B}\lim\limits_{O\to B}I'=0$.

Dans le premier cas, on commence par placer A infiniment près de la surface attirante, qui est ainsi infiniment grande par rapport à la distance à la sphère, et l'attraction est celle d'un plan ($\pm2\pi$). Dans le deuxième cas on commence par faire tendre la surface attirante vers un point si bien que l'attraction est nulle. Le premier cas correspond donc à l'attraction sur un point placé à la surface même, le deuxième à l'attraction sur un point placé au voisinage de la surface. Lagrange se place d'emblée dans le deuxième cas (cf. note [50]), ce qui annule le deuxième terme.

$\dfrac{\pi\cdot(AO-AB)}{r}$ est infiniment petit. Or cette quantité $2\pi-\dfrac{2\pi\cdot AB}{AO}$ n'est $=2\pi$ que dans le cas où AO est infiniment grande par rapport à AB, parce que le terme $\dfrac{2\pi\cdot AB}{AO}$ s'évanouit alors ; & il faut pour cela que BO soit infiniment grande par rapport à AB. Donc quand même on regarderoit le point de surface B comme une surface infiniment petite du second ordre, on n'en seroit pas en droit de conclure que l'attraction de ce point sur le point A est $=2\pi$.

M. de la Grange se seroit exprimé, ce me semble, plus exactement, s'il avoit dit, que tirant du point A la tangente AF, l'attraction de la portion de surface formée par l'arc BF est

$$2\pi-\frac{2\pi\cdot AB}{AF}+\frac{\pi(AF-AB)}{r}, \ /$$

p. 263 qui se réduit (dans le cas où AB est infiniment petite du second ordre) à 2π, parce qu'alors non-seulement AB & AF sont nulles par rapport à r, mais encore AB est nulle par rapport à AF[54]. Ainsi tant que AB n'est pas $=0$ absolu, l'attraction de la surface formée par BF, est finie & $=2\pi$; mais lorsque $AB=0$, cette surface & son attraction sur le point s'évanouissent.

On peut encore considérer que la même surface BF qui exerce sur le point A une attraction finie, lorsque AB est infiniment petite du second ordre, n'exerce plus sur ce même point qu'une attraction infiniment petite, lorsque $AB=0$, BF restant toujours la même & infiniment petite. Le calcul en est facile à faire ; & on trouvera que l'attraction est[55] $\dfrac{\pi\cdot BF}{r}$. Ce résultat n'a rien de surprenant ; car en regardant BF comme une ligne droite, & la surface qui en est formée, comme plane,

---

[54] En effet, avec ce choix ($O=F$) il vient $AF^2+r^2=(r+AB)^2$ c'est-à-dire $AB/AF\simeq AF/2r$, qui est bien $\ll 1$ quand F tend vers B.

[55] Il faut encore intégrer la différentielle de l'attraction, cette fois avec $n=0$:

$$\int_0^x \frac{2\pi rx dx}{(2rx)^{\frac{3}{2}}}=\pi\sqrt{\frac{2x}{r}}=\pi\frac{BF}{r}.$$

l'attraction que souffre le centre B, seroit absolument nulle ; mais la petite courbure de la surface fait que cette attraction est $\dfrac{\pi \cdot BF}{r}$.

On peut remarquer en passant, que si on regarde BF comme infiniment petite du premier ordre, & par conséquent la surface engendrée par BF comme infiniment petite du second ordre, AB^2 sera infiniment petite du quatriéme [56] ; de sorte que, suivant le raisonnement de M. de la Grange, l'attraction de cette surface sur le point A seroit infiniment
p. 264 grande du second ordre, quoiqu'elle / ne soit réellement égale qu'à 2π. Mais en voilà, ce me semble, assez pour faire voir que l'explication du paradoxe donnée par cet habile Géometre, est insuffisante, ce qu'on ne peut pas, ce me semble, dire de la nôtre. Dans l'Article *Gravitation* de l'Encyclopédie, j'en ai donné l'explication analytique, en montrant comment une partie de la différentielle & par conséquent de l'intégrale, s'évanouit dans le cas de $n = 0$. Ici j'en donne la vraie raison Métaphysique [57], en montrant que l'attraction de la surface formée par BF, est toujours $= 2\pi$, excepté dans le cas où AB & BF sont $= 0$. Si le point A est au-dedans de la surface, par exemple en M, & que BM soit infiniment petite du second ordre, on prouvera de même, que l'attraction de la surface formée par BN, est $= 2\pi$ [58].

Fin du huitiéme Mémoire. /

On montre en effet aisément que $BF^2 = 2rx$, par exemple en appliquant deux fois le théorème de Pythagore.

[56] Ce que nous avons écrit en note [54] : $AB/AF \simeq AF/2r$, c'est-à-dire $AB/r \simeq AF^2/2r^2$.

[57] Dans une lettre à D. Bernoulli reproduite en annexe, Clairaut expose au contraire que D'Alembert lui « paroit très loin d'avoir consideré la question en metaphysicien ».

[58] En résumé, pour $AB \ll r$, l'attraction de la portion BN de sphère, est la somme de deux termes : $2\pi\,\mathrm{signe}(AB) + \pi\dfrac{BM}{r}$, où $\mathrm{signe}(AB)$ vaut $+1$, -1 ou 0 suivant que A est à l'extérieur, à l'intérieur ou sur la surface. Le premier terme, qui coïncide avec l'attraction d'un plan, correspond à l'attraction du voisinage de B et ne dépend pas de M. Le deuxième terme correspond à l'attraction du reste de la sphère.