

# Sismologie

F. Chambat

## Exercices

### 1 Magnitude

A partir des deux graphes (fig. 1) ci-dessous, donner :

1. la relation qui lie magnitude et énergie ;
2. l'augmentation d'énergie quand la magnitude augmente d'une unité ;
3. le nombre de séismes de magnitude supérieure à 5 et 4 dans le monde par an ;
4. la loi  $F(M)$  qui donne le nombre de séismes de magnitude supérieure à  $M$ .

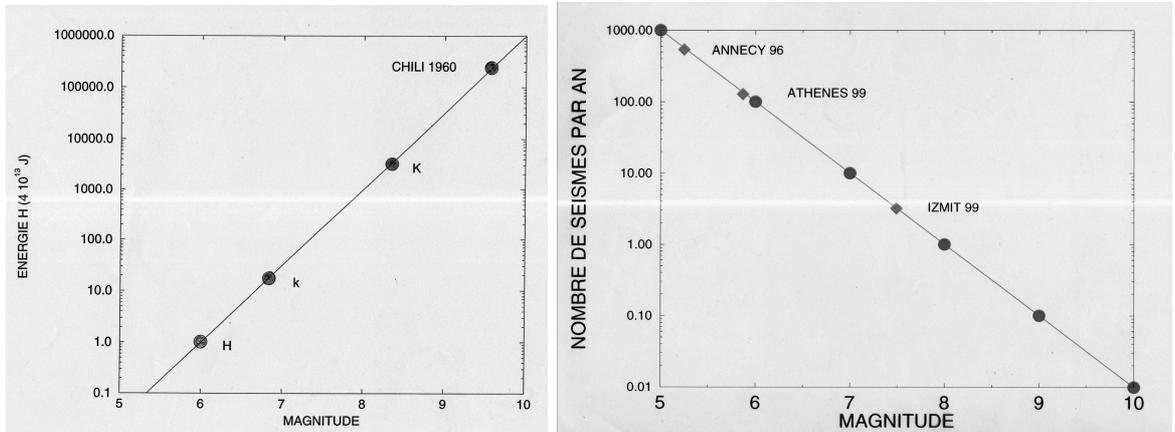


FIG. 1 – Énergie des séismes en fonction de la magnitude, avec quelques exemples d'événements (gauche) ; nombre de séismes de magnitude comprise entre  $M$  et  $M + 1$  par an dans le monde en fonction de la magnitude  $M$  (droite).

### 2 Sismomètre simplifié

Afin d'analyser la réponse d'un sismomètre aux mouvements du sol, schématisons un sismomètre vertical par une masse  $m$  suspendue à une potence par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  (fig. 2).

1. Quel est l'allongement  $y_0$  du ressort quand on lui adjoint la masse ?
2. Soit  $s(t)$  le déplacement du sol dans un référentiel galiléen. Écrire l'équation différentielle du mouvement reliant  $s(t)$  à l'allongement  $y(t)$  du ressort.
3. Soit un mouvement du sol sinusoïdal  $s(t) = A \cos(\omega t)$ . Montrer que  $y(t) = Y \cos(\omega t)$  est solution et représenter la valeur absolue de  $Y$  en fonction de  $\omega$ . Commenter la courbe obtenue.
4. Montrer qu'à haute fréquence, le sismomètre enregistre le déplacement du sol et qu'à basse fréquence, il enregistre son accélération. Avec  $k = 0,4 \text{ kg s}^{-2}$ , que peut-on choisir comme valeur(s) de la masse si on veut enregistrer le déplacement du sol à des périodes de l'ordre de une seconde ?

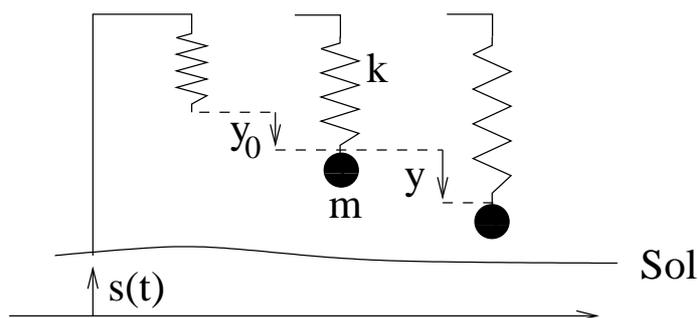


FIG. 2 – *Sismomètre simplifié sans la masse (gauche), avec la masse, au repos (milieu), en mouvement (droite).*

### 3 Sismogrammes trois composantes

Sur les sismogrammes de Saint-Sauveur (fig. 3, haut) :

- 1.** Identifier les ondes P, S, Love et Rayleigh.
- 2.** Les parties basses fréquences de ces ondes arrivent-elles avant ou après les hautes fréquences ?
- 3.** Donner la distance du séisme.

**4.** Donner l'angle d'incidence du rai en surface.

Sur les sismogrammes de Charter-Towers (fig. 3, bas) :

- 5.** Identifier les ondes P, S, Love et Rayleigh.
- 6.** Donner la distance du séisme.
- 7.** Donner l'azimut du séisme.
- 8.** Donner l'angle d'incidence du rai en surface.

### 4 Équation d'onde sonore dans un tuyau

Considérons le mouvement d'un fluide compressible dans un tuyau. Soient  $u(t, x)$  et  $u(t, x + dx)$  les déplacements du fluide en chaque bord d'une tranche élémentaire de fluide.

- 1.** Faire le bilan des forces sur la tranche et lui appliquer le p.f.d.
- 2.** Exprimer la variation de pression en fonction de la variation de volume et d'entropie.
- 3.** A l'aide d'un argument dimensionnel montrer que la propagation d'onde sismique est un phénomène adiabatique.
- 4.** En supposant l'incompressibilité constante, montrer que le déplacement vérifie l'équation d'onde.

### 5 Solutions de l'équation d'onde 1D

- 1.** En posant  $u = x + ct$  et  $v = x - ct$ , résoudre  $\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p$ .

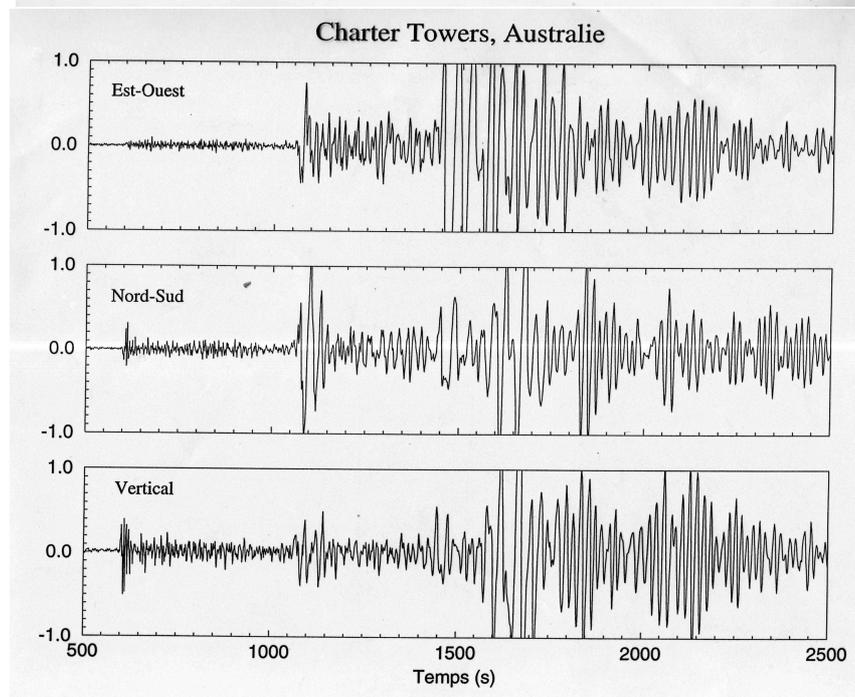
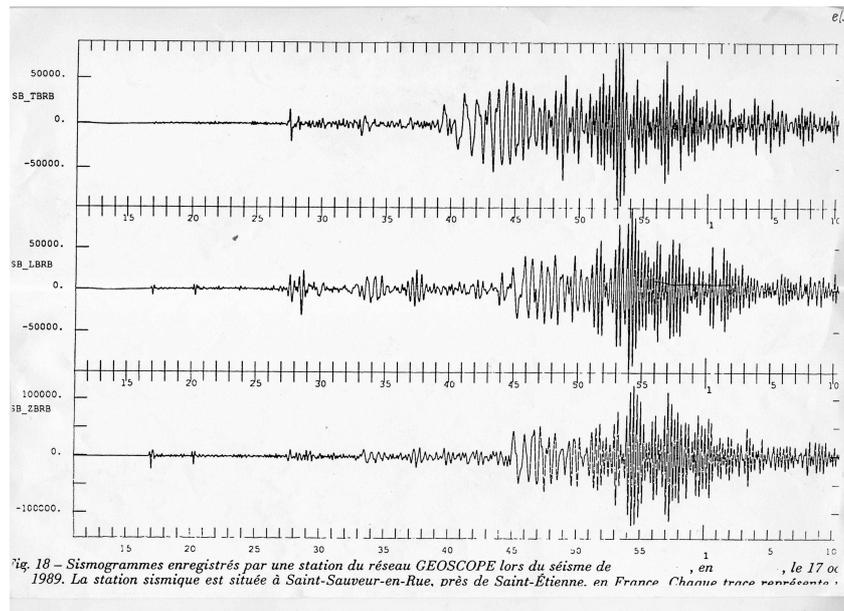


FIG. 3 – Sismogrammes représentant les trois composantes d'une station après un séisme. En haut les trois composantes sont transverse, longitudinale et verticale ; en bas elles sont est-ouest, nord-sud et verticale.

**2.** En posant  $p(t, x) = P(x)e^{i\omega t}$  résoudre  $\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p$ . Si  $p$  est nul en  $x = 0$  que cela impose-t-il sur la solution ? Et si  $p$  est de plus nul en  $x = L$  ? Quelle est la longueur d'une flûte traversière dont la note la plus grave est un *do* à 261.6 Hz ?

## 6 Équation de Navier. Ondes P et S.

Rappeler :

- 1.** La définition du tenseur des contraintes ;
- 2.** la définition du tenseur des déformations ;
- 3.** la relation élastique linéaire isotrope liant contraintes et déformation ; l'équation de la dynamique vérifiée par le tenseur des contraintes.
- 4.** En déduire l'équation de Navier vérifiée par le déplacement  $\vec{u}$ .
- 5.** En posant  $\vec{u}(t, \vec{x}) = \vec{U} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$  donner les caractéristiques des solutions de l'équation de Navier.



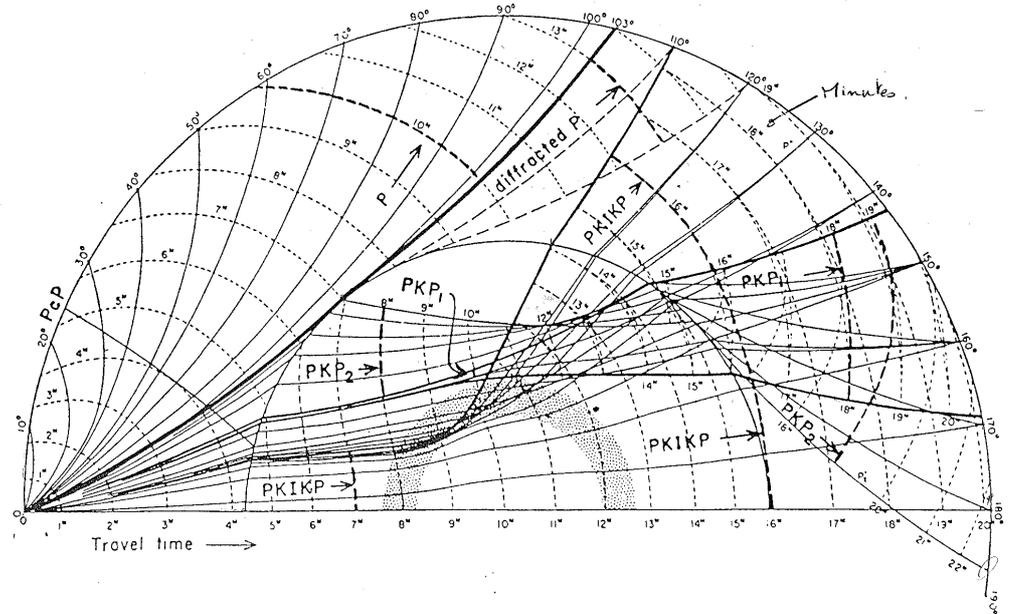


Figure 6.13. Rays and wavefronts for compressional waves in the Earth. Reproduced, by permission, from Gutenberg (1959). (Copyright Academic Press.)

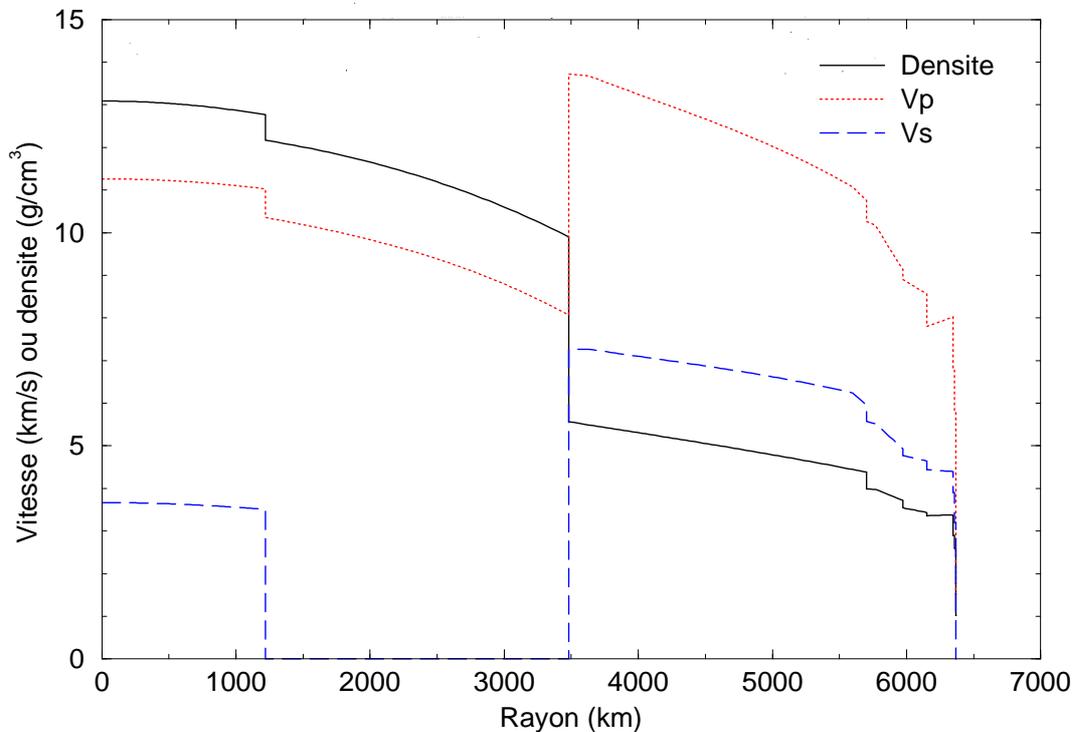


FIG. 5 – Tracé de rais et fronts d'ondes P dans une Terre à symétrie sphérique ; la frontière noyau-graine est ici continue (haut). Modèle de Terre à symétrie sphérique : densité, vitesse des ondes P, vitesse des ondes S ; il s'agit ici du modèle PREM.

**2.** Sauf vers  $120^\circ$  où elles ne sont pas observées, des mesures donnent comme temps d'arrivée des ondes P :

- $T(60^\circ) = 10 \text{ min } 11 \text{ s}$ ,
- $T(90^\circ) = 13 \text{ min } 27 \text{ s}$ ,
- $T(150^\circ) = 19 \text{ min } 47 \text{ s}$ ,
- $T(180^\circ) = 20 \text{ min } 12 \text{ s}$ .

A quelles valeurs de  $\alpha$  correspondent-elles ? Avez-vous une explication concernant ces

résultats ?

**3.** On considère maintenant l'existence d'un noyau de rayon  $c$  et de vitesse longitudinale constante  $\alpha_c$ . Donner l'expression de l'hodochrone  $T_{PcP}(\theta)$  de l'onde P réfléchi en onde P à la surface du noyau.

**4.** Quelle est la valeur maximale  $\theta_l$  de  $\theta$  pour laquelle l'onde PcP existe. Représenter l'allure des hodochrones P et PcP. Que se passe-t-il d'autre à l'angle limite  $\theta_l$  ?

**5.** On mesure  $T_{PcP}(0^\circ) = 8 \text{ min } 32 \text{ s}$ . En admettant que la vitesse trouvée en 2. pour l'onde P observée à  $90^\circ$  soit une bonne approximation de la vitesse moyenne dans le manteau (l'erreur est inférieure à 1%), estimer la profondeur de la discontinuité noyau-manteau et l'erreur sur cette estimation. En déduire la valeur de  $\theta_l$ , et la vitesse moyenne dans le noyau.

## 9 Ondes de Rayleigh. Solution de l'équation d'onde

On cherche à déterminer des solutions de l'équation d'onde dans une Terre plate (demi-espace infini homogène). On note  $Oz$  la direction verticale, et  $z = 0$  le sol.

On rappelle le théorème de décomposition de Helmholtz : soit un champ de vecteurs  $\vec{u}$  nul à l'infini. Il existe un unique couple de champs de vecteurs  $\vec{u}_p$  et  $\vec{u}_s$  nuls à l'infini tels que

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s, \quad \text{div} \vec{u}_s = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{u}_p = 0. \quad (1)$$

La décomposition s'écrit aussi

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}. \quad (2)$$

Soulignons d'autre part que :

$$(\text{div} \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{u} = 0) \Leftrightarrow \vec{u} = 0. \quad (3)$$

**1.** Rappeler l'équation de Navier-Stokes contrôlant le déplacement élastique  $\vec{u}$ . Montrer que  $\vec{u}_s$ ,  $\vec{u}_p$ ,  $\varphi$  et  $\vec{\psi}$  vérifient l'équation d'onde. Que représentent ces solutions ?

**2.** Prenons une solution de la forme  $\vec{u}_p = \vec{U}(z)e^{i(\omega t - kx)}$  ; quelle est la forme de  $\vec{U}$  ?

**3.** Calculer les contraintes verticales  $\sigma_{iz}$ , où  $i = x, y, z$ , en fonction de  $\vec{U}$ .

**4.** Appliquer les conditions aux limites au déplacement total  $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$ .

**5.** En déduire que le mouvement se fait dans un plan ; en déduire également la relation qui lie  $k$  à  $\omega$ .

**6.** La solution est environ  $\omega/k = 0,9V_S$ . Commentaires.

## 10 Modes radiaux d'une sphère homogène

On cherche à déterminer les fréquences des vibrations propres radiales d'une Terre simplifiée. La Terre est considérée homogène, non gravitante, élastique, de rayon  $R$ .

**1.** Rappeler l'équation de Navier-Stokes contrôlant le déplacement élastique  $\vec{u}$ . Puisqu'on s'intéresse ici aux modes radiaux on écrira :  $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r = U(r)e^{i\omega t}\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_r$  étant le vecteur de base radial. Montrer que la symétrie du problème conduit à résoudre

l'équation  $\rho \partial_t^2 \vec{u} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u}$ . Que représentent  $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $k = \omega/c_P$  et  $\theta = \text{div } \vec{u}$  ?

**2.** Montrer que  $\theta$  vérifie l'équation d'onde :  $\partial_t^2 \theta = c_P^2 \Delta \theta$ .

**3.** Montrer qu'en symétrie sphérique le Laplacien peut s'écrire  $\Delta \theta = 1/r \partial_r^2 (r\theta)$ . En posant  $\theta = \tilde{\theta} e^{i\omega t}$  en déduire que  $\tilde{\theta}$  est de la forme  $\tilde{\theta} = A \sin(kr)/r$ .

**4.** En déduire que  $U$  est de la forme :

$$U = \frac{A}{k^2 r^2} (\sin(kr) - (kr) \cos(kr)) \quad (4)$$

**5.** Déterminer les contraintes  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}$  (on pourra écrire  $\partial_r u_r = \text{div } u - 2u_r/r$  et poser  $c_S^2 = \mu/\rho$ ).

**6.** En considérant que la surface de la Terre est libre, montrer que les fréquences propres sont données par la relation :

$$\{1 - (c_P k R / 2c_S)^2\} \text{tg}(kR) = kR. \quad (5)$$

**7.** En utilisant l'approximation  $\lambda = \mu$ , et en posant  $x = kR$ , proposer une méthode graphique pour résoudre cette équation.

**8.** Un tracé de cette fonction révèle que les racines sont de l'ordre de  $x_n = (n+1)\pi$  avec  $n$  entier, appelé ordre radial. Expliquer ce résultat. L'approximation  $\lambda = \mu$  est-elle fondamentale? Qu'aurait-on trouvé pour un fluide?

**9.** On considérera désormais que les racines sont  $x_n = (n+1)\pi - \epsilon$  avec  $\epsilon$  petit. Quelles sont les fréquences propres?

**10.** On mesure les différentes fréquences propres suivantes (en mHz) :

n	f	df	n	f	df
0	0.81439	0.00003	5	4.88840	0.00049
1	1.63165	0.00008	6	5.74225	0.00057
2	2.50795	0.00025	7	6.58000	0.00066
3	3.27258	0.00033	8	7.42900	0.00074
4	4.10645	0.00041	9	8.26920	0.00083

où  $n$  est l'ordre radial,  $f$  la fréquence et  $df$  l'incertitude sur  $f$ . Donner le principe d'une telle mesure.

**11.** Que peut-on en déduire sur  $c_P$  ?

**12.** On discutera les incertitudes ainsi que les approximations effectuées.

**13.** Combien la fonction  $\tilde{\theta}_n(r)$  ( $=\tilde{\theta}$  à  $n$  fixé) a-t-elle de zéros? Même question pour  $u_n$ . Représenter  $\tilde{\theta}_n(r)$ .

## Formulaire

En coordonnées sphériques soient  $u_r, u_\theta, u_\phi$  les composantes physiques du vecteur déplacement, soient  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\theta\phi}$  les composantes physiques du tenseur des contraintes. On a :

$$\vec{\text{grad}} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\vec{\text{Rot}}\vec{u} &= \frac{\vec{e}_r}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (u_\phi r) \right) + \frac{\vec{e}_\phi}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (7)$$

$$\text{div}\vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r u_\phi) \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \text{div}\vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \text{div}\vec{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (9)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda \text{div}\vec{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{r\phi} = \mu \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right). \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \cot \theta u_\phi \right) \right), \quad (12)$$

## 11 Tomographie - Les plaques plongeantes

**1.** Analyser les images de tomographie ci-dessous (fig. 6). Que peut-on déduire sur les plaques plongeantes ?

**2.** Quel est le contraste de température entre la plaque plongeante et le manteau ? Cette différence a-t-elle le temps de s'équilibrer pendant la descente de la plaque ?

**3.** En déduire un ordre de grandeur du coefficient  $\left. \frac{\partial \ln V_S}{\partial T} \right|_P$  dans le manteau.

**4.** Comparer les influences de la pression et de la température sur les vitesses sismiques dans le manteau.

## 12 TP - Tomographie - Le test du damier

Dans ce TP on veut faire apparaître quelques caractéristiques de l'inversion tomographique en réalisant une expérience numérique sur le schéma ci-dessous (fig. 7).

Sur l'EPI récupérer `td11_tptomo.tar.gz`, le décompresser (`tar xvzf td11_tptomo.tar.gz`), se placer dans le répertoire `td11_tptomo`. Il contient un programme `tomo.m` et des fichiers de modèles `*.dat`. Lancer `matlab` et y exécuter le programme `tomo`. Le menu vous donne plusieurs choix de modèles de terrain. A chaque choix le résultat est :

- à gauche : modèle synthétique de départ,
- au milieu : modèle obtenu par inversion,
- à droite : modèle *a priori*.

**1.** Analyser les variations de la qualité de l'inversion.

**2.** Essayer de « deviner » quels modèles *a priori* peuvent faire varier les résultats. Vérifier numériquement avec le programme.

**3.** Essayer avec un damier  $8 \times 8$ . Expliquer le résultat.

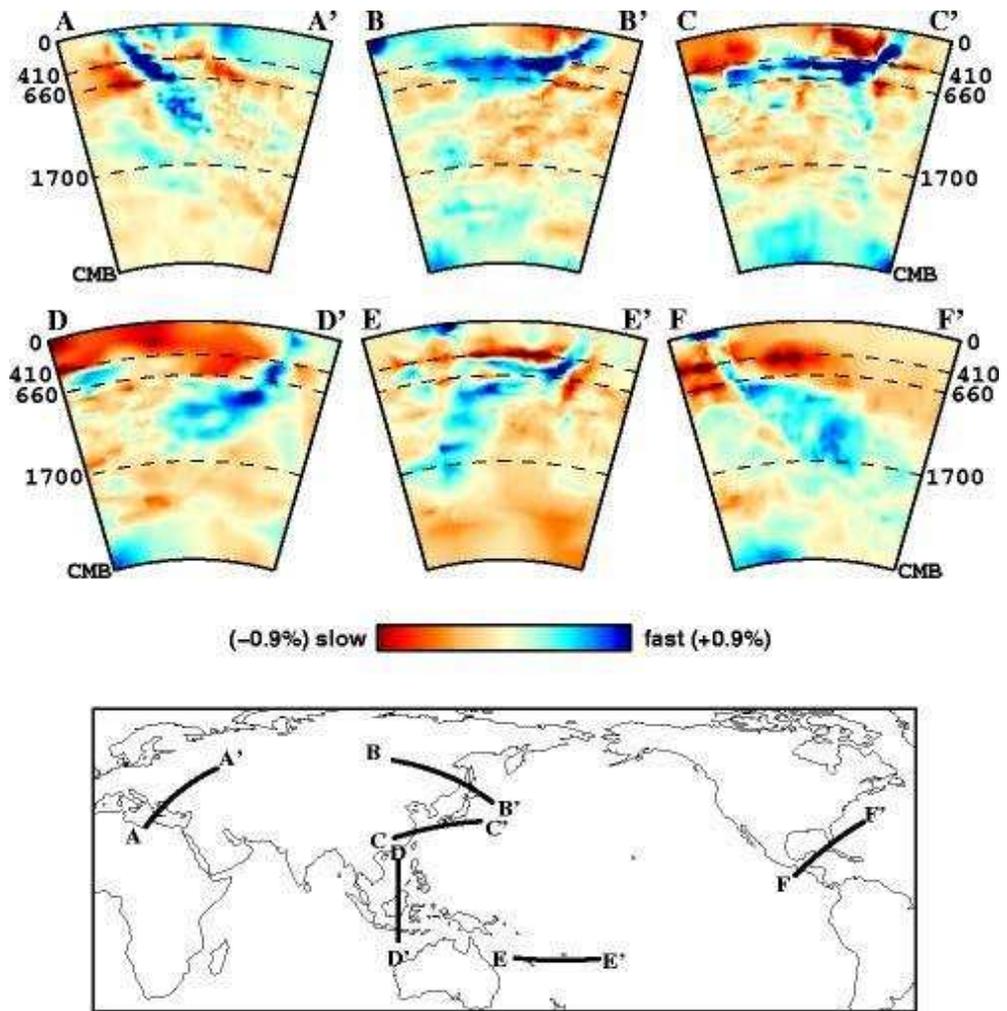


FIG. 6 – Variations latérales de vitesse (haut) suivant les coupes indiquées sur la carte (bas). Source : Karason, H., and Van der Hilst, R.D., 2000, Constraints on mantle convection from seismic tomography, In : The History and Dynamics of Global Plate Motion, Richards, M.R., Gordon, R., and Van der Hilst, R.D. (Eds.), Geophysical Monograph (AGU, Washington, D.C.), v. 121, p. 277-288.

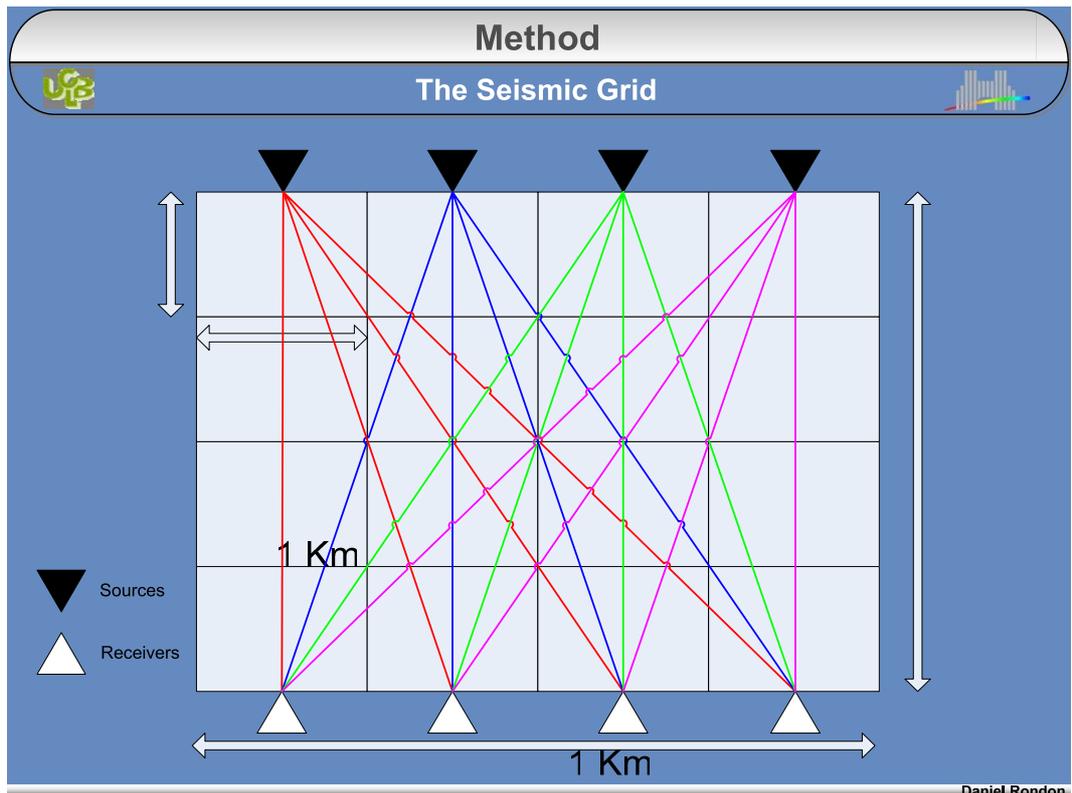


FIG. 7 – Schéma de l'expérience : terrain constitué de  $n \times n$  cases en carré ayant chacune une vitesse sismique, avec  $n$  sources d'un côté,  $n$  récepteurs de l'autre. A partir d'un modèle de départ, on calcule des temps de parcours synthétiques pour tous les rais possibles. Ces temps deviennent alors des données qu'on inverse, c'est-à-dire qu'on cherche le modèle tel que les temps de parcours dans celui-ci sont aussi proches que possible des données. On obtient alors un modèle a posteriori. Pour stabiliser l'inversion il faut se fixer un modèle a priori, c'est-à-dire le modèle qu'on pense être le plus réaliste avant d'avoir inversé les données. Souvent on choisit un modèle sans variations. Source : Rondon D., 2005, Tomography, rapport de méthodes numériques, M1.