Sismo

F. Chambat, ENS Lyon

Version du 9 décembre 2011

Principe de Fermat

Où l'on montre comment obtenir l'équation du rai à partir du principe de Fermat.

Rappel de calcul des variations : l'intégrale $I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} L(\tau, \vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)) d\tau$, où L est appelé Lagrangien, est *stationnaire*[1] ssi les équations d'Euler-Lagrange sont vérifiées :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right). \tag{1}$$

$\dot{\vec{x}}$ signifie $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$, dérivée par rapport au paramètre décrivant la courbe. Ce paramètre est, dans cette version, supposé fixe (càd indépendant de toute perturbation de trajectoire) aux extrémités de la courbe.

Principe de Fermat : entre deux points donnés, un rai sismique (ou un rayon lumineux), courbe définie par la perpendiculaire aux fronts d'onde, suit le trajet qui rend stationnaire le temps de parcours $\int_{\text{rai}} n \, ds$.

Pour trouver l'équation du rai il faut donc appliquer le calcul de variations à cette intégrale. Soit τ un paramètre décrivant la courbe, elle s'écrit :

$$I = \int_{\text{rai}} n \, ds = \int_0^{s_{\max}} n(\tau, \vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)) \, ds = \int n(\vec{x}(\tau)) \, ds. \tag{2}$$

Le paramètre τ ne peut être égal à s car il doit être fixe aux extrémités de la courbe ce qui n'est pas le cas de l'abscisse curviligne s. Il faut faire apparaître ce paramètre. Par définition on a $ds = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x}}$ ou, plus précisément, $ds/d\tau = \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}$ et donc :

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} n(\vec{x}(\tau)) \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} \, d\tau. \tag{3}$$

Il suffit alors d'écrire les équations d'Euler-Lagrange avec $L = n(\vec{x}(\tau))(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}})^{1/2}$. Cela donne :

$$(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}})^{1/2} \, \frac{\partial n}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{d\tau} \left(n \frac{\dot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}})^{1/2}} \right). \tag{4}$$

De nouveau avec $ds/d\tau = \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}$ on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right).} \tag{5}$$

Cette relation permet de tracer un rai $\vec{x} = \vec{x}(s)$ connaissant $n(\vec{x})$.

[1]Et non *minimale* ou *extrémale*. Un point selle p. ex. est stationnaire mais n'est ni minimal ni extrémal. *Stationnaire* signifie que toute perturbation de l'intégrale est au moins du second ordre en perturbation de paramètres, en terme de fonction cela signifie que les dérivées premières sont nulles.