TD - Les distributions

Magistère des sciences de la Terre, ENS Lyon.

1. On veut montrer que l'on peut dériver, au sens des distributions, une fonction discontinue et qu'il apparaît alors un Dirac. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que h a une dérivée première h' continue sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$, h et h' ont au point a une limite à gauche et une limite à droite finies. Soit $\tilde{h}$ la restriction de h à $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$, soient $[h] = [\tilde{h}]$ et $[\tilde{h}']$ les distributions régulières définies par les fonctions $h, \tilde{h}' \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$[h]' = [\tilde{h}'] + (h(a^+) - h(a^-))\delta_a.$$

où $h(a^+)$ et $h(a^-)$ sont les limites à droite et à gauche de h au point a.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$, $S \in \mathcal{D}'$; montrer la formule de Leibniz :

$$(fS)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(m-k)} S^{(k)}.$$

3. a) Pourquoi la fonction $x \to \ln|x|$ définit-elle une distribution régulière ?

b) Pourquoi $x \to 1/x$ ne définit-elle pas une distribution régulière ?

c) On peut néanmoins définir *valeur principale de* $1/x$ comme suit. On note $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ la fonctionnelle :

$$< \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que cette limite existe et qu'elle définit une distribution. On rappelle que la continuité d'une distribution S équivaut aux propriétés suivantes, souvent plus aisées à démontrer : $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$, $\exists c \geq 0, \exists m \in \mathbb{N}$ dépendant de K tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \mathrm{Supp}\varphi \subset K \quad \Rightarrow \quad | < S, \varphi > | \leq c\ \sup|\varphi^{(m)}|,$$

$$(\text{ou :}) \quad \Rightarrow \quad | < S, \varphi > | \leq c' \sum_{k=0}^{m} \sup|\varphi^{(k)}|.$$

d) Quelle est la distribution $x.\mathrm{vp}\frac{1}{x}$?

e) Quelle est la dérivée de la distribution $[\ln|x|]$?

4. Que sont les distributions suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$[H(x)] \otimes [H(y)]$, $\delta_0(x) \otimes \delta_0(y)$ et $[1(x)] \otimes \delta_0(y)$.

5. Soit un volume V de $\mathbb{R}^3$, de surface S. Soit la distribution de Heaviside H :

$H(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in V,$

$H(x) = 0 \quad$ sinon.

Montrer que grad$H = -\delta_S n$ où δ_S est le Dirac de surface et n est la normale unitaire à S, orientée vers l'extérieur. On rappelle le théorème de Stockes :
$\int_V \mathrm{div}\vec{u}\ \mathrm{d}V = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}S.$

6. Calculer les dérivées partielles et le laplacien de $[1/r]$ dans $\mathbb{R}^3$. En déduire le laplacien du potentiel de gravité défini par $\phi = -G\rho * 1/r$.

7. Soit S l'opérateur qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ fait correspondre :
$< S, \varphi >= \int_0^\infty \varphi(t,t)\ \mathrm{d}t.$
Montrer que S est une distribution et calculer $\partial S/\partial x + \partial S/\partial y$.

8. Soit ρ la densité dans la Terre. On supposera qu'elle est dérivable partout dans la Terre sauf sur une surface fermée autour du centre (l'interface noyau-manteau par exemple) où elle est discontinue. Que vaut le gradient de ρ ?