

TD - Traitement du signal

M1 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Frédéric Chambat.

— o —

Convolution et distributions

1. Montrer que la convolution est commutative, associative, et distributive par rapport à l'addition.

2. Montrer que $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

3. Montrer que $f * \delta = f$.

4. Calculer la convolution de

a) deux fonctions « porte »,

b) deux « fonctions » formées chacune par la somme de deux diracs,

c) des deux signaux échantillonnés $f = [...0, \underline{3}, 2, 1, 0...]$ et $g = [...0, \underline{2}, 1, 0, 0...]$,

où le chiffre souligné indique celui situé à l'indice 0 (p. ex. ici $f_0 = 3$).

d) des deux signaux échantillonnés $f = [...f_{-1}, \underline{f_0}, f_1, f_2, f_3, 0...]$ et $g = \frac{1}{3} [...0, 1, \underline{1}, 1, 0, 0...]$. Quel nom pourriez vous donner à cette opération ?

e) des deux signaux échantillonnés $f = [...f_{-1}, \underline{f_0}, f_1, f_2, f_3, 0...]$ et $g = [...0, \underline{1}, -1, 0, 0...]$. Quel nom pourriez vous donner à cette opération ? Et si on applique deux fois de suite la convolution par g ?

5. Montrer que les fonctions suivantes tendent vers un dirac quand $T \in \mathbb{R}$ tend vers l'infini :

a) Porte de largeur $1/T$ de hauteur T ,

b) $\frac{T}{\pi(T^2 t^2 + 1)}$,

c) $T \sin_c(Tt)$.

d) Proposer une autre famille de fonctions qui tend vers un dirac.

6. A partir d'une convolution, montrer que :

a) $H' = \delta$.

b) $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.

Dériver :

c) $p(t)$, où $p = 1$ sur $[0; 1]$ et 0 ailleurs.

d) $H(t) \cos(\pi t)$.

e) $H(t) \sin(\pi t)$.

7. On modélise un sismomètre par une masse suspendue au bout d'un ressort de raideur k . Montrer que l'équation différentielle régissant la position du ressort est $x'' + \omega^2 x = \omega^2 y$ où y est le déplacement du sol. Mettre cette équation sous la forme $a * x = y$. Soit $c = \omega H(t) \sin(\omega t)$. Montrer que $a * c = \delta$. En déduire x en fonction de y . Donner $x(t)$ pour les mouvements suivants $y(t) = \alpha \delta(t)$, $y(t) = \alpha H(t)$, $y(t) = \alpha t H(t)$, $y(t) = \alpha H(t) \sin(\omega' t)$. Dans ce dernier cas que se passe-t-il pour $\omega \simeq \omega'$?

8. En sismique on provoque un ébranlement $e(t)$ en surface d'un sous-sol composé de couches homogènes et horizontales de vitesses v_i , d'épaisseurs h_i et de coefficients de réflexion r_i à leur base. Comment s'écrit le signal $s(t)$ reçu au même point (point où l'ébranlement a été provoqué) ? L'écrire sous la forme $s = i * e$. En déduire des méthodes pour retrouver les paramètres du sous-sol.

9. Soit $Du = 0$ l'équation de la chaleur à 1 D et sans sources, avec $u(x, t)$ la température et D l'opérateur $D = \partial_t - k \partial_x^2$. Montrer que la fonction suivante est une fonction de Green de D (c.à-d. $DG = \delta(t, x)$) :

$$G(x, t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi kt}} \exp - \frac{x^2}{4kt}. \quad (1)$$

On cherche les solutions nulles pour $t < 0$. Quelle est l'équation satisfaite par la distribution $U(x, t) = H(t)u(x, t)$? En déduire U en fonction de G et de $u(x, 0)$. Quelle est la température dans un barreau infini de température uniforme à l'origine ? Et dans un barreau semi infini ? On notera $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z \exp -x^2 dx$ et on rappelle que $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$. Quel est le profil de température dans la lithosphère ?

Propriétés de la transformée de Fourier

Montrer les propriétés suivantes :

10. $\operatorname{TF}^{-1}(f) = \overline{\operatorname{TF}(\bar{f})}$

11. $\operatorname{TF}(f * g) = \operatorname{TF}(f) \times \operatorname{TF}(g)$

12. $\operatorname{TF}(f \times g) = \operatorname{TF}(f) * \operatorname{TF}(g)$

13. $\operatorname{TF}(f(t - a)) = e^{-i\omega a} \operatorname{TF}(f(t))$

- 14.** $\text{TF}(f(t/T)) = T\text{TF}(f)(T\omega)$
- 15.** $\text{TF}(e^{i\omega_0 t} f)(\omega) = \text{TF}(f)(\omega - \omega_0)$
- 16.** $\text{TF}(\cos(\omega_0 t) f)(\omega) = \frac{1}{2} (\text{TF}(f)(\omega - \omega_0) + \text{TF}(f)(\omega + \omega_0))$
- 17.** $\text{TF}(f') = i\omega \text{TF}(f)$
- 18.** $(\text{TF}(f))' = -i\text{TF}(tf)$

Transformées de Fourier classiques

Montrer les TF suivantes :

- 19.** $\text{TF}(p)(\nu) = \text{sin}_c(\nu)$ où p est la porte de hauteur et largeur unité, et le sinus cardinal désigne $\text{sin}_c(\nu) = \sin(\pi\nu)/(\pi\nu)$.
- 20.** $\text{TF}(e^{-\pi t^2}) = e^{-\pi \nu^2}$
- 21.** $\text{TF}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)}\right) = \dots$
- 22.** $\text{TF}(\delta) = 1$
- 23.** $\text{TF}(1) = \delta$
- 24.** $\text{TF}(e^{2i\pi\nu_0 t}) = \delta(\nu - \nu_0)$
- 25.** $\text{TF}(\cos(2\pi\nu_0 t)) = \dots$
- 26.** $\text{TF}(\text{shah}) = \text{shah}$ où $\text{shah}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$
- 27.** Si f est une fonction périodique de période $T = 1/\nu_0$, alors

$$\text{TF}(f)(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\nu - k\nu_0) \quad (2)$$

où les F_k sont les coefficients de la série de Fourier de f .