

École Normale Supérieure de Lyon  
Département des Sciences de la Vie et de la Terre  
Master de Sciences de la Terre

# Introduction au traitement du signal

Frédéric Chambat

7 février 2005



# Table des matières

Introduction . . . . .	3
Mon signal favori . . . . .	4
Bibliographie succincte . . . . .	6
<b>1 Les distributions</b>	<b>7</b>
1.1 Un point de vue physique . . . . .	8
1.2 Définition des distributions . . . . .	9
1.2.1 Les fonctions tests . . . . .	9
1.2.2 Les distributions . . . . .	10
1.2.3 Les distributions régulières . . . . .	11
1.3 Quelques opérations sur les distributions . . . . .	12
1.3.1 Translation, multiplication... . . . .	12
1.3.2 Dérivation . . . . .	13
1.3.3 Limite d'une suite de distributions . . . . .	14
1.3.4 Dérivation sous le signe distribution . . . . .	15
1.4 Distributions sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
1.4.1 Définitions . . . . .	15
1.4.2 Produit tensoriel de deux distributions . . . . .	17
1.5 La convolution . . . . .	19
1.5.1 Définitions . . . . .	19
1.5.2 Propriétés . . . . .	20
1.5.3 Sous-espaces de $\mathcal{D}'$ . . . . .	21
1.5.4 Propriété de régularisation . . . . .	21
1.5.5 Revenons à la physique . . . . .	22
<b>2 La transformée de Fourier</b>	<b>27</b>
2.1 Un point de vue physique . . . . .	27
2.2 Les sinusoides, une base de fonctions . . . . .	29
2.3 Transformée de Fourier d'une fonction . . . . .	30
2.3.1 Définition de la transformée de Fourier . . . . .	30
2.3.2 Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	31
2.4 Les fonctions à décroissance rapide . . . . .	32
2.5 Les distributions tempérées . . . . .	33
2.6 TF dans $L^2$ . . . . .	36

2.7	Généralisation à $\mathbb{R}^n$ . . . . .	37
2.8	Un exemple : la TF du Heaviside . . . . .	37
<b>3</b>	<b>La TF Numérique</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1	Troncature . . . . .	39
3.2	Échantillonnage . . . . .	42
3.2.1	Représentation du signal échantillonné . . . . .	42
3.2.2	Duplication spectrale . . . . .	44
3.2.3	Repliement spectral et fréquence de Nyquist . . . . .	44
3.3	Le calcul classique : les TF discrète et rapide . . . . .	45
3.3.1	Échantillonnage en fréquence . . . . .	45
3.3.2	La TF discrète ou TFD . . . . .	46
3.3.3	La TF rapide ou FFT . . . . .	47
3.4	Fenêtres d'apodisation . . . . .	49
3.5	Effet d'un tendance . . . . .	51
3.6	La modulation d'amplitude . . . . .	51
3.7	La TF est complexe . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Compléments</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Transformée en $Z$ . . . . .	56
4.2	Filtrage linéaire . . . . .	57
4.3	L'intercorrélation . . . . .	59
4.4	Signaux aléatoires . . . . .	60
4.5	La transformée de Hilbert . . . . .	63
4.6	Analyse temps-fréquence . . . . .	64

## Introduction

La terminologie de «traitement du signal» regroupe un certain nombre de techniques utilisées pour extraire d'un signal, en général une suite de mesures, les informations qui intéressent le «traiteur de signal».

Face à un même signal deux personnes ne sont pas forcément intéressées par les mêmes informations parmi celles qu'il contient<sup>1</sup>, et tous les traitements ne sont pas équivalents si bien qu'il en existe une grande diversité. Ce cours se borne essentiellement à ne présenter qu'une technique, celle de la transformée de Fourier, suivant ainsi les cours classiques. Celle-ci possède en effet plusieurs avantages : elle est relativement simple, ses propriétés sont encore valables pour d'autres types de traitement, et elle est d'usage constant pour la résolution des équations aux dérivées partielles de la physique.

Sans toutefois m'appesantir sur la rigueur mathématique, j'ai choisi de présenter les notions mathématiques essentielles en traitement du signal parce que ces notions me paraissent pour le physicien d'une portée plus générale que les détails de telle ou telle technique de traitement. Ce cours suit en cela, sur le fond et la forme, l'ouvrage de F. Roddier. Certains paragraphes de son livre sont parfois repris quasiment mot pour mot car il m'a semblé que je ne pourrais surpasser sa clarté. Le cours de Dominique Gibert (professeur à l'Université de Rennes) m'a été d'une grande utilité, ainsi que source d'inspiration. Pour certains éléments mathématiques je me suis aidé du cours de Mme Hervé et M. Combes donné en licence de mathématiques à Paris 6.

Les deux premiers chapitres, sur les distributions et la transformée de Fourier, constituent en quelque sorte une introduction mathématique au traitement du signal. Le troisième passe en revue les principaux problèmes qui se posent lorsque l'on veut effectuer pratiquement la transformée d'un signal physique. Le dernier chapitre rassemble quelques notions présentées succinctement comme le filtrage, la transformée de Hilbert, les signaux aléatoires et l'analyse temps-fréquence. Les exercices de cours ont été placés ► entre triangles ◀ et les parties de moindre importance ont été écrites en petits caractères.

---

<sup>1</sup>Comme le fait remarquer D. Gibert : *le signal de l'un peut être le bruit de l'autre.*

## Mon signal favori

Pour débiter en traitement du signal commençons par considérer l'exemple (figures ci-après) du signal constitué du nombre de naissances en France jour par jour, de 1969 à 1994 inclus (figure du haut à gauche). Quelles informations ce signal recèle-t-il ?

Tout d'abord que le nombre moyen de naissances par jour est de l'ordre de 2000 et que la tendance à longue période est une chute de ce nombre vers le 2000<sup>e</sup> jour, puis une légère augmentation suivie d'une diminution progressive.

On remarque également une périodicité de l'ordre de 400 jours (1 an exactement<sup>2</sup>). Faisons un agrandissement du rectangle de la figure. On aboutit à la figure du haut à droite. La périodicité annuelle est toujours visible. Il ne semble pas y avoir d'autre trait marquant à cette échelle.

Recommençons l'agrandissement deux fois. Il apparaît une périodicité de sept jours (milieu à droite) marquant un déficit de naissances le samedi et le dimanche. La figure du bas gauche (même figure que la première sauf qu'on a supprimé les traits reliant les points), fait immédiatement ressortir ces déficits de naissances le week-end.

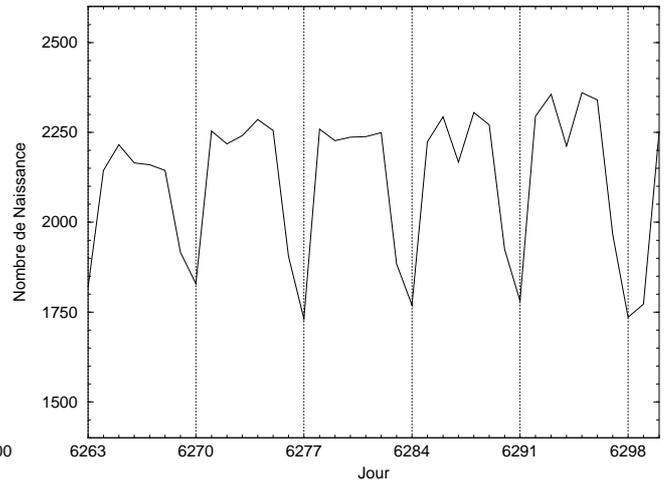
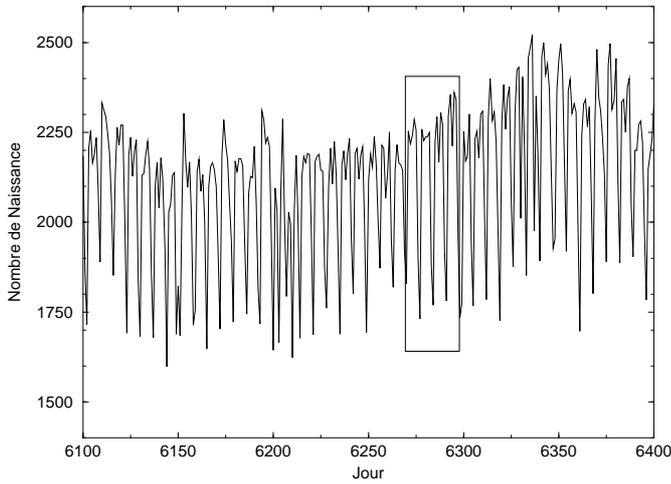
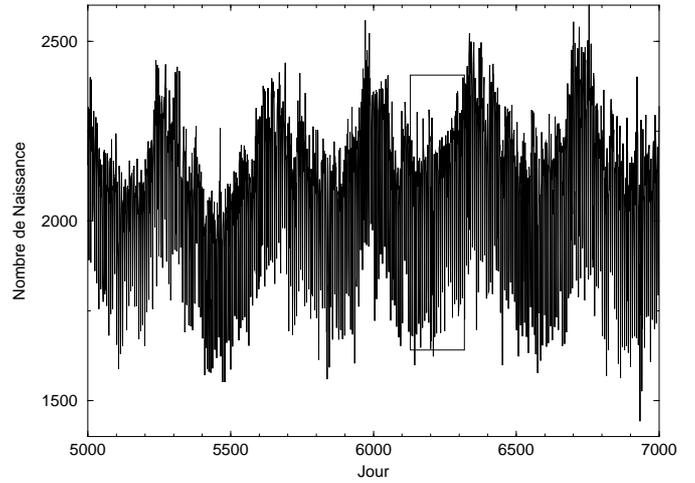
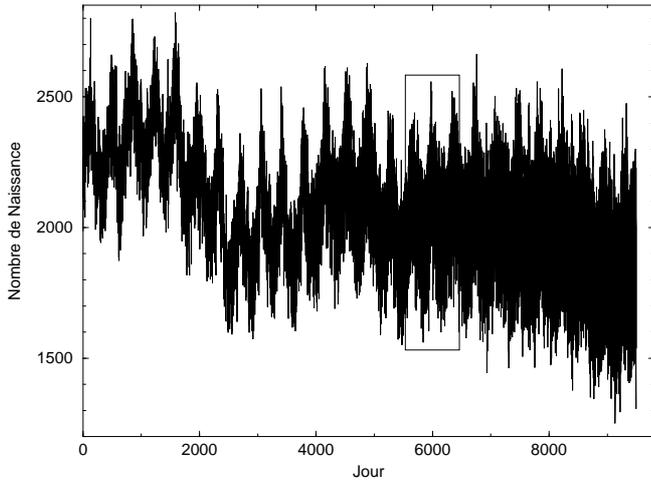
Enfin, la dernière figure représente le module de la transformée de Fourier du signal, c'est-à-dire *l'amplitude de chacune des sinusoïdes présente dans le signal*, en fonction de la période. Les périodes 7 et 365 jours ressortent immédiatement<sup>3</sup>.

Ce petit exercice montre à quel point la façon de regarder le signal est importante : chaque représentation fait apparaître d'une manière plus ou moins claire les diverses composantes du signal. Le travail du traiteur de signal n'est rien d'autre que ce nous nous venons de faire. Il faut étudier l'automatisation de cette procédure, notamment par la transformée de Fourier numérique, et les propriétés de cette automatisation. C'est le but du cours de traitement du signal.

---

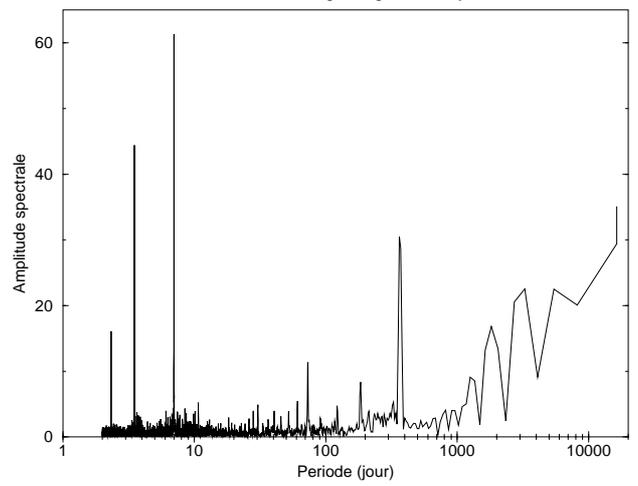
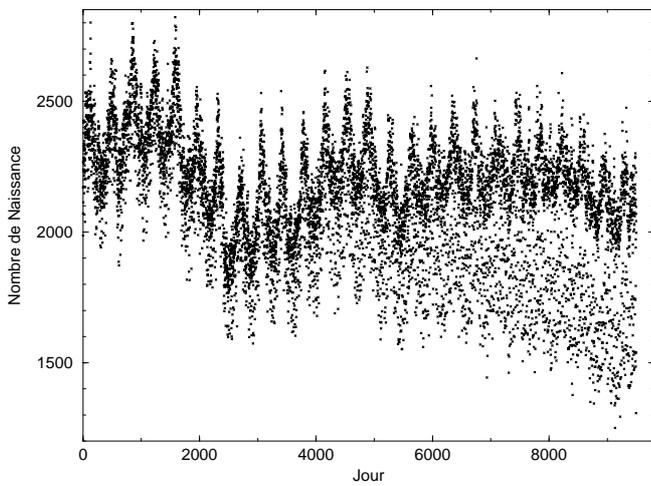
<sup>2</sup>Cette périodicité provient des pics de naissance 9 mois après l'été et après Noël.

<sup>3</sup>On verra pourquoi il y a également des pics à 7/2 et 7/3 jours.



FFT du nombre de naissances (nais.padding)

1969-1994, Hanning, corrigé de la moyenne



## Bibliographie succincte

- ✓ Bellanger M., 1987, Traitement numérique du signal, Masson.
- ✓ Boccara N., 1984, Analyse Fonctionnelle, Ellipses.
- ✓ Dautray R., Lions J.-L., 1984, Analyse mathématique et calcul numérique, Annexe "Distributions" pp.1307-1392, collection enseignement CEA, Masson.
- ✓ Gasquet C., Witomski P., 1997, Analyse de Fourier et applications, Masson.
- ✓ Gibert, D., 1996, Éléments de traitement du signal, Cours de l'Université de Rennes 1.
- ✓ Hervé, Combes, Cours de licence de mathématiques, 1990-91, module Variables complexes, Analyse de Fourier, Paris 6.
- ✓ Lacoume J.-L., 1983, Théorie du signal, Que-sais-je?, PUF.
- ✓ Mari J.-L., Glangeaud F., Coppens, F., 1997, Traitement du signal pour géologues et géophysiciens, Technip (Publications de l'IFP).
- ✓ Max J., 1972, Méthodes et techniques en traitement du signal, deux tomes, Masson.
- ✓ Roddier François, 1978, Distributions et transformations de Fourier, McGraw-Hill.
- ✓ Schwartz Laurent, 1961, nouveau tirage 1983, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann.
- ✓ Thomas, Y., 1992, Signaux et systèmes linéaires, Masson.

# Chapitre 1

## Les distributions

**Distribution** : *n.f.* (fin XIII<sup>e</sup> ; lat. *distributio*) **1°**) Répartition de personnes, **2°**) Répartition à des endroits différents, **3°**) Arrangement (de choses) suivant un certain ordre (Le Petit Robert).

Les distributions, développées en mathématiques par Sobolev (1936) puis L. Schwartz (1950), sont d'une grande utilité en physique et en traitement du signal, où interviennent transformées de Fourier et convolutions. La rigueur de certains calculs et leur compréhension ne peuvent en effet être atteintes que grâce aux distributions. Par ailleurs, la représentation mathématique des propriétés physiques sous la forme de fonctions n'est qu'une simplification pratique mais fondamentalement inadaptée et qui trouve sa généralisation dans le cadre de la théorie des distributions. Ce n'est pas un hasard si les physiciens parlent de *distributions* de charges, de courants, de masse... D'un autre point de vue, certaines distributions, le dirac par exemple, peuvent être considérées comme une idéalisation de la réalité, de la même sorte que les discontinuités internes de la Terre peuvent représenter en fait des transitions, plus ou moins rapides radialement et continues latéralement, des propriétés physiques.

Les distributions les plus classiques sont définies comme des fonctionnelles linéaires sur l'espace des fonctions tests infiniment dérivables à support compact dans  $\mathbb{R}$ . Ce chapitre a pour but d'introduire ces distributions ainsi que les opérations essentielles que l'on peut leur appliquer, dont une des plus importante est probablement la dérivation. Le passage de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}^n$  permet de définir le produit tensoriel et la convolution dont on sait l'importance en physique.

## 1.1 Un point de vue physique

Un exemple de distribution connue est la distribution de Dirac<sup>1</sup>, notée  $\delta$ . D'un point de vue mathématique c'est une fonctionnelle qui à une fonction  $f$  associe sa valeur en 0 :  $\delta(f) = f(0)$ . Elle intervient en physique lorsque, entre autres, on parle de *distribution ponctuelle*. Soit par exemple une masse pesante  $m$  ponctuelle située au point origine  $O$ . Comment faire le lien entre cette masse ponctuelle et la notion de *distribution*<sup>2</sup> de densité  $\rho$  continue ? Il faudrait pour cela chercher  $\rho$  ponctuelle telle que :

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \, dV.$$

On a envie de représenter cette densité par la fonction  $\rho = m\delta$  où  $\delta$  serait une fonction vérifiant :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

$$\int \delta \, dV = 1.$$

Ce qui est absurde puisque la théorie de l'intégration stipule que cette intégrale est nulle<sup>3</sup>. La notion de fonction est donc inadaptée à ce type de description. En effet, le physicien n'accède qu'indirectement aux propriétés de la matière (ici la densité  $\rho$ ), par la *mesure* de quantités «intégrées» comme la masse, la gravité, les moments d'inertie, etc. :

$$\text{Masse : } m = \int \rho \, dV$$

$$\text{Gravité en } r' : g(r') = G \int \rho \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \, dV$$

$$\text{Moment d'inertie par rapport au point } r' : I = \int \rho |r - r'|^2 \, dV.$$

La notion mathématique de *fonctionnelle* est alors particulièrement adaptée à ce type de description physique : on appelle distribution  $\rho$  la fonctionnelle (linéaire) qui à une fonction fait correspondre un scalaire :

$$\begin{array}{ll} \text{Fonction} & \xrightarrow{\rho} \text{Scalaire} \\ 1 & \longrightarrow m \\ G \frac{r - r'}{|r - r'|^3} & \longrightarrow g(r') \\ |r - r'|^2 & \longrightarrow I. \end{array}$$

<sup>1</sup>Qu'on appellera simplement *dirac*.

<sup>2</sup>Terme pris ici au sens commun de *répartition spatiale*.

<sup>3</sup>car elle porte sur l'ensemble réduit à  $\{0\}$ , qui est de mesure nulle, c'est-à-dire constitué d'un nombre «négligeable» de valeurs de la variable.

Ainsi la masse  $m$  ponctuelle placée en  $O$  sera représentée par :

$$f \xrightarrow{\rho} mf(O)$$

et on dira que  $\rho = m \delta$ . Avec cette formulation, le calcul de la masse, de la gravité et de l'inertie de cette densité ponctuelle est immédiat :

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\rho} m = m \\ G \frac{r - r'}{|r - r'|^3} &\xrightarrow{\rho} g(r') = -Gm \frac{r'}{|r'|^3} \\ |r - r'|^2 &\xrightarrow{\rho} I = m|r'|^2. \end{aligned}$$

Comme l'intuition le suggère, disons d'emblée que cette distribution est la limite, au sens des distributions, de séries de fonctions tendant vers l'infini en 0, vers 0 ailleurs, et d'intégrale toujours égale à  $m$ .

## 1.2 Définition des distributions

### 1.2.1 Les fonctions tests

Les distributions sont donc des fonctionnelles, c'est-à-dire des applications définies sur un ensemble de fonctions que l'on nomme fonctions tests. Plus cet ensemble est restreint, c'est-à-dire plus les fonctions tests sont régulières, plus l'espace des distributions est général. Le choix le plus classique consiste à prendre  $\mathcal{D}$ , espace des fonctions infiniment dérivables à support borné :

#### Définition 1

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des fonctions tests est défini par :

$$\mathcal{D} = \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \text{ à support borné} \} \quad (1.1)$$

où le support d'une fonction est le plus petit fermé en dehors duquel la fonction est nulle :

$$\text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x, \varphi(x) \neq 0\}}. \quad (1.2)$$

► Montrer que la fonction suivante est une fonction test :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{x^2-1} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Solution :  $\varphi^{(n)}(x)$  est le produit d'une fraction rationnelle de dénominateur  $(1 - x^2)^{2n}$  par  $\exp(x^2 - 1)$  donc  $\lim_{|x| \rightarrow 1} \varphi^{(n)}(x) = 0$ . ◀

Un théorème, dit théorème d'approximation, stipule que toute fonction continue à support borné peut-être approchée uniformément par une fonction

de  $\mathcal{D}$ . Il appelle deux remarques :

- l'espace  $\mathcal{D}$  est assez général puisque dense dans un espace beaucoup plus général,
- la notion de fonction est inadaptée à la physique puisque la mesure, aussi précise soit-elle, ne permet pas de distinguer entre une fonction  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et une fonction non dérivable.

### Définition 2

On dit que la série  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}$  ssi :

- les supports de  $\varphi_k$  sont contenus dans un même ensemble indépendant de  $k$  (c'est-à-dire que les supports ne tendent pas vers l'infini),
- les dérivées de chaque ordre des  $\varphi_k$  convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de  $\varphi$ .

Dans ce cas  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

## 1.2.2 Les distributions

### Définition 3

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur  $\mathcal{D}$ .

$$\text{On notera } S : \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \rightarrow & \langle S, \varphi \rangle = S(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

$S$  est donc une distribution ssi :

- $S$  linéaire :  $\langle S, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \lambda \langle S, \varphi_1 \rangle + \mu \langle S, \varphi_2 \rangle$ ,
- $S$  continue : si  $\varphi_k$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$ ,  $\langle S, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle S, \varphi \rangle$  dans  $\mathbb{R}$ . La continuité équivaut aux propriétés suivantes, souvent plus aisées à démontrer :

$\forall K$  compact  $\subset \mathbb{R}$ ,  $\exists c \geq 0$ ,  $\exists m \in \mathbb{N}$  dépendant de  $K$  tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{Supp } \varphi \subset K \Rightarrow |\langle S, \varphi \rangle| \leq c \sup |\varphi^{(m)}|,$$

$$(\text{ou :}) \Rightarrow |\langle S, \varphi \rangle| \leq c' \sum_{k=0}^m \sup |\varphi^{(k)}|.$$

Propriété : l'ensemble  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  des distributions sur  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel appelé espace dual topologique de  $\mathcal{D}$ .

**Définitions** (évidentes). La somme de deux distributions :

$$\langle S_1 + S_2, \varphi \rangle = \langle S_1, \varphi \rangle + \langle S_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (1.4)$$

la multiplication par un scalaire  $\lambda$  :

$$\langle \lambda S, \varphi \rangle = \lambda \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (1.5)$$

l'élément neutre pour l'addition :

$$\langle 0, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (1.6)$$

Deux distributions sont dites égales ssi :

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 = 0 &\Leftrightarrow \langle S_1 - S_2, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \langle S_1, \varphi \rangle = \langle S_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

On dit que  $S$  est portée par le fermé  $F \subset \mathbb{R}$ , ou que  $F$  est le support de  $S$  si et seulement si  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  avec  $\text{Supp} \varphi$  disjoint à  $F$ ,  $\langle S, \varphi \rangle = 0$ .

Exemples de distribution :

✓ le dirac au point  $a$  :  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ . On notera souvent  $\delta = \delta_0$  pour le dirac en 0.

✓ le créneau de longueur unité :  $\langle \mathbb{1}_{[0,1]}, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) dx$ .

► Montrer que ce sont des distributions et déterminer par quels ensembles elles sont portées.

Solution : La linéarité de  $\delta_a$  est évidente; sa continuité provient de :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \delta_a, \varphi_k \rangle = \lim \varphi_k(a) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle \quad \forall \varphi_k \rightarrow \varphi.$$

Son support est  $\{a\}$ .

$\mathbb{1}_{[0,1]}$  est linéaire, de support  $[0, 1]$ , et continue car  $|\langle S, \varphi \rangle| \leq \sup |\varphi|$ . ◀

On peut étendre aisément la définition de  $\langle S, f \rangle$  à certaines fonctions  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  si  $\text{Supp} S \cap \text{Supp} f$  est un compact. En effet, pour toute fonction  $\theta \in \mathcal{D}$  valant 1 sur un voisinage de ce compact,  $\langle S, \theta f \rangle$  à une valeur indépendante de  $\theta$  que l'on notera  $\langle S, f \rangle$ . C'est le cas de la masse définie par  $m = \langle \rho, 1 \rangle$ . Cette expression a un sens bien que 1 ne soit pas à support borné, puisque  $\rho$  est, lui, à support borné.

### 1.2.3 Les distributions régulières

Le sous-espace des distributions régulières est particulièrement intéressant parce que constitué des fonctionnelles simples reliées à la notion classique de fonction. Rappelons qu'on note  $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions localement intégrables, c'est-à-dire intégrables sur tout ensemble borné. On peut alors énoncer la :

#### Définition 4 (et propriété)

Toute fonction  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  définit une distribution, notée  $[h]$ , par<sup>4</sup> :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle [h], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx. \quad (1.7)$$

Toute distribution définie de la sorte est appelée distribution régulière.

<sup>4</sup>Sauf mention contraire l'intégrale sera toujours prise sur  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

► Montrer que  $[h]$  définit bien une distribution. Solution :  $h\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  car  $\varphi$  est à support compact.  $[h]$  est évidemment linéaire, continue car pour tout  $K$  tel que  $\text{Supp}\varphi \subset K$  :

$$| \langle [h], \varphi \rangle | \leq \sup |\varphi| \int_K |h(x)| dx,$$

ce qui vérifie la propriété de continuité avec  $m = 0$  et  $c = \int_K |h|$ . ◀

### 1.3 Quelques opérations sur les distributions

Il y a deux principes qui sous-tendent les définitions des opérations classiques sur les distributions :

- ces opérations sont définies de façon à être compatibles avec les définitions classiques portant sur les intégrales, pour les distributions régulières,
- ces opérations sont définies par transposition sur les fonctions tests.

#### 1.3.1 Translation, multiplication...

✓ La translatée  $\tau_a S$  de  $a$  de la distribution  $S$  est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \tau_a S, \varphi \rangle = \langle S, \tau_{-a} \varphi \rangle, \quad (1.8)$$

où le translatée d'une fonction est défini par  $(\tau_a \varphi)(x) = \varphi(x - a)$ . On pourra noter  $\tau_a S(x) = S(x - a)$ .

✓ Le symétrique  $\sigma S$  :

$$\langle \sigma S, \varphi \rangle = \langle S, \sigma \varphi \rangle \quad \text{avec } (\sigma \varphi)(x) = \varphi(-x). \quad (1.9)$$

✓ Le changement d'échelle  $e_a S$ , pour  $a \neq 0$  :

$$\langle e_a S, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle S, e_{1/a} \varphi \rangle \quad \text{avec } (e_a \varphi)(x) = \varphi(ax). \quad (1.10)$$

► Justifier ces définitions. Solution : On veut que  $\tau_a[h] = [\tau_a h]$ ,  $\sigma[h] = [\sigma h]$  et  $e_a[h] = [e_a h]$ . Justifions uniquement la définition du changement d'échelle qui est la moins évidente :

$$\begin{aligned} \langle e_a[h], \varphi \rangle &= \langle [e_a h], \varphi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(ax) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{y=ax}{=} \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \varphi(y/a) dy & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} h(y) \varphi(y/a) dy & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\forall a}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \varphi(x/a) dx \\ &= \frac{1}{|a|} \langle [h], e_{1/a} \varphi \rangle. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

On ne peut définir en toute généralité la multiplication de deux distributions. Les deux fonctions sommables,  $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$  en fournissent un exemple car  $f(x)g(x) = 1/x$  n'est pas intégrable à l'origine. On peut définir par contre la multiplication d'une distribution par une fonction infiniment dérivable :

**Définition 5**

Soit  $S \in \mathcal{D}'$  et  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $fS$  est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle fS, \varphi \rangle = \langle S, f\varphi \rangle. \quad (1.11)$$

► Justifier cette définition. Solution :  $f\varphi$  est bien dans  $\mathcal{D}$  car  $\varphi$  l'est et  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . La linéarité de  $fS$  est évidente. La continuité vient de :

$$\begin{aligned} |\langle fS, \varphi \rangle| &= |\langle S, f\varphi \rangle| \\ &\leq c \sup |(f\varphi)^{(m)}| \\ &\leq c \sup \left| \sum_{k=0}^m C_m^k f^{(m-k)} \varphi^{(k)} \right| \\ &\leq c' \sup \sum_{k=0}^m |\varphi^{(k)}|, \end{aligned}$$

avec  $c' = c \max_{k=0, m} \{C_m^k \sup |f^{(m-k)}|\}$ . Cette définition est compatible avec  $f[h] = [fh]$  pour les distributions  $[h]$  régulières. ◀

**1.3.2 Dérivation**

La dérivabilité est une des propriétés les plus importantes des distributions. On définit la dérivée  $S'$  d'une distribution par transposition :

$$\langle S', \varphi \rangle = - \langle S, \varphi' \rangle. \quad (1.12)$$

Cette définition rend les distributions infiniment dérivables :

**Définition 6**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on définit la dérivée  $k^{\text{ème}}$  d'une distribution par :

$$\langle S^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle S, \varphi^{(k)} \rangle. \quad (1.13)$$

► 1) Justifier cette définition. Si  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ ,  $h'$  définit-elle forcément une distribution régulière ?

2) Soit la distribution de Heaviside définie par la fonction :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer la propriété importante :

$$H' = \delta. \quad (1.14)$$

Calculer sa dérivée seconde.

3) Montrer la formule de Leibniz :

$$(fS)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k f^{(m-k)} S^{(k)}. \quad (1.15)$$

4) Montrer que les distributions solutions de  $S' = 0$  sont toutes de la forme  $S = [\lambda]$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On remarquera pour cela que  $S$  s'annule sur l'ensemble des fonctions  $\psi \in \mathcal{D}$  telles que  $\int \psi = 0$  et on posera  $\psi = \varphi - \theta \int \varphi$  avec  $\int \theta = 1$  (solution complète page 38). ◀

### 1.3.3 Limite d'une suite de distributions

#### Définition 7

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$  tend dans  $\mathcal{D}'$  vers la distribution  $S$  ssi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle. \quad (1.16)$$

► Montrer que la suite de distributions régulières définies par  $h_n = n \mathbb{1}_{[-1/2n, 1/2n]}$  converge et déterminer sa limite. Solution :

$$\langle [h_n], \varphi \rangle = n \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi(x) dx \stackrel{y=nx}{=} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(y/n) dy$$

qui tend probablement vers  $\varphi(0)$ . Pour le montrer formons :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(y/n) dy - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{-1/2}^{1/2} (\varphi(y/n) - \varphi(0)) dy \right| \\ &= \left| \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{y/n} \varphi'(x) dx dy \right| \\ &\leq \sup |\varphi'| \int_{-1/2}^{1/2} |y|/n dy \\ &\leq \frac{1}{4n} \sup |\varphi'| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il en découle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [h_n] = \delta$ . On retrouve ainsi cette idée bien connue que le dirac peut-être considéré comme une limite de «fonctions» tendant vers l'infini en 0, vers 0 ailleurs et d'aire unité. ◀

### 1.3.4 Dérivation sous le signe distribution

Il existe un équivalent du théorème de dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{d^k}{dy^k} \int h(x)\psi(x, y) dx = \int h(x) \frac{\partial^k}{\partial y^k} \psi(x, y) dx. \quad (1.17)$$

Soient donc  $S \in \mathcal{D}'$  et  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , c'est-à-dire :

$$\psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & \psi(x, y) \end{pmatrix}$$

telle que  $\text{Supp}\psi \subset I \times \mathbb{R}$  où  $I$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $y$  on peut appliquer  $S$  à la fonction  $x \rightarrow \psi(x, y)$ . On note cette application  $S_x$  ou  $S(x)$  et on peut énoncer le :

**Théorème** (non démontré) : Si  $\text{Supp}\psi \subset I \times \mathbb{R}$  avec  $I$  compact alors l'application  $y \rightarrow \langle S(x), \psi(x, y) \rangle$  est définie, elle est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et ses dérivées à l'ordre  $k$  sont :

$$\frac{d^k}{dy^k} \langle S(x), \psi(x, y) \rangle = \langle S(x), \frac{\partial^k}{\partial y^k} \psi(x, y) \rangle. \quad (1.18)$$

## 1.4 Distributions sur $\mathbb{R}^n$

### 1.4.1 Définitions

L'ensemble des fonctions tests sur  $\mathbb{R}^n$  est :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ dans } \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \text{ à support borné}\}.$$

On note :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{N},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^{(\alpha)}\varphi = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Les définitions et propriétés sur  $\mathbb{R}$  se généralisent aisément à  $\mathbb{R}^n$  :

✓ Propriété de continuité :  $\forall K$  compact  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $\exists c \geq 0$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{N}^n$  dépendant de  $K$  tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{Supp}\varphi \subset K \Rightarrow |\langle S, \varphi \rangle| \leq c \sup |D^{(\alpha)}\varphi|.$$

✓ Distributions régulières :

$$\begin{aligned} \langle [h], \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} h(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

✓ Dirac au point  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

✓ Distribution superficielle de Dirac sur une surface  $\Sigma$  :

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_\Sigma \varphi \, d\Sigma.$$

✓ Distribution linéique de Dirac sur une courbe  $\mathcal{L}$  :

$$\langle \delta_{\mathcal{L}}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{L}} \varphi \, d\mathcal{L}.$$

✓ Dérivée :

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \text{et, plus généralement :}$$

$$\langle D^\alpha S, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S, D^\alpha \varphi \rangle.$$

► Exemple : soit, dans  $\mathbb{R}^3$ , une surface fermée  $S$  de normale unitaire  $n$  orientée vers l'extérieur, entourant un volume  $V$ . Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  continuellement dérivable dans le volume  $V$  et à l'extérieur du volume (dans  $\mathbb{R}^3 \setminus V$ ). Soit  $s = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}$  le saut de la fonction au travers de l'interface. En physique, cette configuration exprime que  $S$  est une interface pour la quantité  $f$ . Le gradient de cette quantité n'est pas défini au sens des fonctions. Trouvez son expression au sens des distributions. On rappelle le théorème de Stokes pour un vecteur  $u$  continuellement dérivable :

$$\int_V \operatorname{div} u \, dV = \int_S u \cdot n \, dS.$$

Solution : La distribution  $\operatorname{grad}[f]$  s'applique à un vecteur test  $u$ . L'intégration par parties mène au résultat par :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}[f], u \rangle &= - \langle [f], \operatorname{div} u \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} f \operatorname{div} u \, dV = - \int_V f \operatorname{div} u \, dV - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} f \operatorname{div} u \, dV \\ &= - \int_V (\operatorname{div}(fu) - u \cdot \operatorname{grad} f) \, dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} (\operatorname{div}(fu) - u \cdot \operatorname{grad}f) \, dV \\
= & - \int_S f_{\text{int}} u \cdot n \, dS + \int_V u \cdot \operatorname{grad}f \, dV \\
& - \int_S f_{\text{ext}} u \cdot (-n) \, dS + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} u \cdot \operatorname{grad}f \, dV \\
= & \int_S su \cdot n \, dS + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus S} u \cdot \operatorname{grad}f \, dV \\
= & \langle s\delta_S n, u \rangle + \langle [\operatorname{grad}f], u \rangle .
\end{aligned}$$

Le terme  $[\operatorname{grad}f]$  doit être compris au sens du gradient de la restriction de  $f$  à l'espace entier privé de la surface. Puisque c'est vrai pour toute fonction test on en déduit que :

$$\operatorname{grad}[f] = [\operatorname{grad}f] + s\delta_S n, \quad (1.19)$$

c'est-à-dire que la dérivée, au sens des distributions, d'une fonction discontinue s'exprime comme la somme de la dérivée usuelle, là où cette fonction est dérivable, et d'un dirac de surface. Cela généralise simplement le fait que la dérivée d'un heaviside est un dirac. ◀

### 1.4.2 Produit tensoriel de deux distributions

Le produit tensoriel permet de définir une distribution sur  $\mathbb{R}^{p+q}$  à partir de deux distributions sur  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$ . Explicitons le cas  $p = q = 1$ , la généralisation à  $p, q$  quelconques étant immédiate. Soient deux distributions régulières  $[f]$  et  $[g]$  que l'on notera  $[f(x)]$  et  $[g(y)]$  pour identifier les variables sur lesquelles elles portent. On a déjà remarqué que  $f(x)g(x)$  ne définit pas forcément une distribution. Par contre  $[f(x)g(y)]$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet, si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ , la fonction :

$$fg : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & f(x)g(y) \end{pmatrix}$$

est dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ . On peut donc définir  $[f(x)g(y)]$  par :

$$\begin{aligned}
\langle [f(x)g(y)], \varphi(x, y) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\varphi(x, y) \, dx \, dy \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(x, y) \, dy \, dx.
\end{aligned}$$

Or la fonction :

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(x, y) \, dy$$

est dans  $\mathcal{D}$ , donc :

$$\begin{aligned}
\langle [f(x)g(y)], \varphi(x, y) \rangle &= \langle [f(x)], \langle [g(y)], \varphi(x, y) \rangle \rangle \\
&= \langle [g(y)], \langle [f(x)], \varphi(x, y) \rangle \rangle .
\end{aligned}$$

La distribution  $[f(x)g(y)]$  est appelée produit tensoriel de  $f$  et  $g$  et noté  $[f(x)] \otimes [g(y)]$ . La généralisation à deux distributions quelconques est immédiate :

**Définition 8 (et théorème)**

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \forall S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , les expressions  $\langle S(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle$  et  $\langle T(y), \langle S(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle$  ont un sens, sont égales et définissent une distribution par :

$$\begin{aligned} \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(y), \langle S(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Cette distribution est appelée produit tensoriel de  $S$  et  $T$ .

► **Propriétés à montrer :**

✓ Dérivation :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} (S(x) \otimes T(y)) = S(x)^{(p)} \otimes T(y)^{(q)}.$$

Preuve pour  $p = 0, q = 1$  :

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial y} (S(x) \otimes T(y)), \varphi \rangle &= - \langle S(x) \otimes T(y), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \rangle \\ &= - \langle S(x), \langle T(y), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle S(x), \langle T'(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle S(x) \otimes T'(y), \varphi(x, y) \rangle . \end{aligned}$$

✓ Si  $S$  portée par  $A$  et  $T$  portée par  $B$  alors  $S(x) \otimes T(y)$  est portée par  $A \times B$ .

✓ Associativité :

$$S(x) \otimes (T(y) \otimes U(z)) = (S(x) \otimes T(y)) \otimes U(z) = S(x) \otimes T(y) \otimes U(z).$$

✓ La généralisation à  $\mathbb{R}^{p+q}$  est évidente ; il suffit de prendre  $x \in \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{R}^q$ .

◀

## 1.5 La convolution

La dernière opération que nous allons définir est le produit de convolution, appelé plus simplement la convolution. Contrairement au produit tensoriel, la convolution n'est pas toujours définie. Si elle l'est, elle associe à deux fonctions ou distributions sur  $\mathbb{R}$  une nouvelle fonction ou distribution sur  $\mathbb{R}$ . Réservant la signification physique de cette opération pour la fin du chapitre, nous donnons d'emblée les définitions et propriétés.

### 1.5.1 Définitions

On définit le produit de convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t - t') dt' \quad (1.20)$$

Le produit de convolution de deux fonctions n'est pas toujours défini. Il l'est par exemple si les fonctions sont de carré intégrable ou si elles sont intégrables et que l'une des deux est à support compact, mais ce n'est pas nécessaire.

Définissons maintenant la convolution de deux distributions. Procédons pour cela comme d'habitude, c'est-à-dire en partant des distributions régulières. Examinons donc dans quel cas on peut définir la convolution de deux distributions régulières par :

$$[f] * [g] = [f * g] \quad (1.21)$$

Si  $f$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$  (classe des fonctions intégrables, cf. def. 12, p. 31) et si  $f * g$  est défini alors  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . La distribution  $[f * g]$  existe alors et on peut définir  $[f] * [g]$  par la relation 1.21, puis l'écrire en fonction de  $[f]$  et  $[g]$  :

$$\begin{aligned} \langle [f] * [g], \varphi \rangle &= \langle [f * g], \varphi \rangle \\ &= \int \int f(t')g(t - t') dt' \varphi(t) dt \\ &= \int f(t') \int g(y)\varphi(t' + y) dy dt' \\ &= \langle [f(x)], \langle [g(y)], \varphi(x + y) \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Cette expression pourrait s'écrire :

$$\langle [f(x)] \otimes [g(y)], \varphi(x + y) \rangle ,$$

si la fonction :

$$\left( \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow \varphi(x + y) \end{array} \right)$$

appartenait à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  mais, dans le cas général elle est dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . En effet, si  $K = \text{Supp}\varphi = [a, b]$ , alors le support de l'application :

$$(x, y) \rightarrow \varphi(x + y)$$

est défini par :

$$a \leq x + y \leq b \Leftrightarrow a - x \leq y \leq b - x,$$

qui est une bande non compacte de  $\mathbb{R}^2$ . La définition de la convolution de distribution est donc définie par l'intermédiaire du produit tensoriel :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle$$

mais cette expression n'a un sens que si la bande de  $\mathbb{R}^2$  est réduite à un compact. On énonce donc la :

### Définition 9 (et théorème)

Soient  $S$  et  $T$  deux distributions portées par  $A$  et  $B$ ; si pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{(x, y) \in A \times B, x + y \in K\}$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  alors  $S * T$  défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle \quad (1.22)$$

est une distribution sur  $\mathbb{R}$ , appelée produit de convolution de  $S$  et  $T$ .

Exemples :

- ✓ Pour que la convolution de deux distributions ait un sens il suffit que l'une des deux distributions soit à support borné.
- ✓ Les distributions à support borné forment un espace vectoriel  $\mathcal{E}'$  dans lequel la convolution a toujours un sens.
- ✓ Les distributions à support borné à gauche (resp. à droite) forment un espace vectoriel noté  $\mathcal{D}'_+$  (resp.  $\mathcal{D}'_-$ ) dans lequel la convolution a toujours un sens.

### 1.5.2 Propriétés

Si tous les produits sont définis deux à deux alors (► les démonstrations de ces propriétés sont laissées à titre d'exercice. ◄) :

$$S * T = T * S$$

$$R * (S * T) = (R * S) * T = R * S * T$$

$$R * (S + T) = R * S + R * T$$

$$(S * T)' = S' * T = S * T'$$

$$(S * T)^{(n)} = S^{(k)} * T^{(n-k)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, n]$$

$$S * \delta_0 = S$$

$$S * \delta_a = \tau_a S$$

$$S * \delta_0^{(k)} = S^{(k)}.$$

Autrement dit le produit de convolution est commutatif, associatif, distributif par rapport à l'addition mais ne se dérive par comme un produit de fonction. Le dirac en 0 est l'élément neutre pour la convolution et pour dériver une distribution à l'ordre  $k$  il suffit de la convoluer par la dérivée  $k^{\text{ème}}$  du dirac.

Ces propriétés ne sont vraies que si les produits existent deux à deux comme le montre le contre-exemple :

$$\begin{aligned} H * \delta' * 1 &= H * (\delta' * 1) = H * 1' = H * 0 = 0 && \text{mais aussi :} \\ &= (H * \delta') * 1 = H' * 1 = \delta * 1 = 1. \end{aligned}$$

Ce calcul est faux parce que  $H * 1$  n'existe pas ; la définition-théorème 9 ne s'applique pas pour  $H$  et 1 puisque l'ensemble  $\{(x, y) \in A \times B, x + y \in K\}$  est une demi-bande non bornée de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.5.3 Sous-espaces de $\mathcal{D}'$

Comme nous l'avons déjà mentionné, si l'on choisit des fonctions tests plus générales que celle de  $\mathcal{D}$  on obtient des espaces de distributions plus restreint que  $\mathcal{D}'$ . Par exemple :

- ✓ Espace  $\mathcal{S}$  : espace des fonctions infiniment dérivables décroissant à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées, plus vite que toute puissance de  $1/|x|$ ,
  - ✓ Espace  $\mathcal{E}$  : espace des fonctions infiniment dérivables.
- Ils engendrent les sous-espaces de  $\mathcal{D}'$  :
- ✓ Espace  $\mathcal{S}'$  : espace des distributions tempérées,
  - ✓ Espace  $\mathcal{E}'$  : espace des distributions à support borné.

On appelle algèbre de convolution tout espace de distribution contenant  $\delta$  et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini de distributions.  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{D}'_+$  et  $\mathcal{D}'_-$  sont des algèbres de convolution. Comme nous allons le voir ces algèbres permettent le calcul algébrique, c'est-à-dire la résolution d'équations.

### 1.5.4 Propriété de régularisation

On peut définir le produit de convolution d'une distribution  $S \in \mathcal{D}'$  par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  :

$$S * \varphi(x) = \langle \sigma_{\tau_x} S, \varphi \rangle = \langle \tau_x \circ S, \varphi \rangle = \langle S(y), \varphi(x - y) \rangle$$

Alors pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}$  :

$$\checkmark S * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } (S * \varphi)^{(n)} = S^{(n)} * \varphi = S * \varphi^{(n)},$$

- ✓  $\text{Supp}(S * \varphi) \subset \text{Supp}S + \text{Supp}\varphi$ ,
- ✓  $(S * \varphi) * \psi = S * (\varphi * \psi) = (S * \psi) * \varphi$ .

Ces propriétés sont appelées *propriétés de régularisation* car elles permettent de construire des fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à partir de fonctions non régulières ou de distributions. Cela peut constituer un procédé de construction de fonctions de  $\mathcal{D}$ . En effet si  $\varphi \in \mathcal{D}$  et si  $f$  est une fonction sommable à support compact alors :

$$\psi(x) = \int f(t)\varphi(x-t) dt \text{ est une fonction de } \mathcal{D},$$

ce qui signifie que  $\psi$  est «lissé» par ce processus et présente ainsi des fluctuations moins «rapides» que celles de  $f$ . La régularisation permet par ailleurs de montrer le :

**Théorème :** Toute distribution  $S$  est limite dans  $\mathcal{D}'$  d'une suite de fonctions de  $\mathcal{D}$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{D}'$ .

Ce qui explique que les distributions puissent être vues comme une généralisation des fonctions.

### 1.5.5 Revenons à la physique

#### Signification physique de la convolution

Du point de vue physique, et si l'on s'intéresse au cas d'un système évoluant dans le temps, la convolution intervient dès que le système est linéaire continu et invariant dans le temps (c'est-à-dire souvent). Un système physique  $\mathcal{P}$  est souvent considéré comme un opérateur faisant correspondre à tout signal d'entrée (ou excitation)  $e(t)$  un signal de sortie (ou réponse)  $s(t)$  du système :

$$e(t) \xrightarrow{\text{système physique } \mathcal{P}} s(t).$$

Par commodité, on notera :

$$s(t) = \mathcal{P}(e(t))$$

bien que  $s = \mathcal{P}(e)$  ou  $s(t) = \mathcal{P}(e(t'))$  seraient plus appropriés puisque  $\mathcal{P}$  s'applique aux valeurs de  $e(t')$  pour tous les  $t' \in \mathbb{R}$ .

En sismique par exemple :

$e(t)$  : source sismique (explosif, camion vibreur...),

↓  $\mathcal{P}$  : croûte terrestre,

$s(t)$  : Mouvements du sol (sismogramme).

Les propriétés de linéarité et d'invariance s'écrivent :

$$\mathcal{P}(\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)) = \alpha_1 \mathcal{P}(e_1(t)) + \alpha_2 \mathcal{P}(e_2(t)) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t),$$

$$s(t - t_0) = (\mathcal{P}(e))(t - t_0) = \mathcal{P}(e(t - t_0)).$$

En généralisant :

$$\mathcal{P}\left(\sum_i \alpha_i e(t - t_i)\right) = \sum_i \alpha_i s(t - t_i),$$

et en passant au cas continu :

$$\mathcal{P}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t') e(t - t') dt'\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t') s(t - t') dt',$$

ce qu'on a défini comme la convolution. Le passage du signal au travers du système physique s'écrit donc :

$$\mathcal{P}(\alpha * e) = \alpha * s = \alpha * \mathcal{P}(e).$$

Puisque  $\alpha$  et  $e$  ont des rôles symétriques on a aussi :

$$\mathcal{P}(\alpha * e) = \mathcal{P}(\alpha) * e. \quad (1.23)$$

En généralisant ces relations aux distributions, on peut introduire une notion importante, celle de *réponse impulsionnelle*. Il s'agit de la réponse  $i(t)$  du système à un signal d'entrée formé d'*impulsions*, c'est-à-dire mathématiquement de dirac. Avec  $\alpha = \delta$ , l'expression 1.23 devient :

$$s = \mathcal{P}(e) = \mathcal{P}(\delta) * e = i * e, \quad (1.24)$$

où la réponse impulsionnelle est définie par :

$$i = \mathcal{P}(\delta). \quad (1.25)$$

Ceci montre que la réponse d'un système linéaire continu et invariant est égale à la convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle du système. Cette remarque met en lumière l'importance de la convolution en physique puisque celle-ci permet de séparer analytiquement le rôle de la source et du milieu physique. Comme dans le cas de la Terre traversée par des ondes sismiques, de l'atmosphère traversée par le rayonnement stellaire ou un instrument électronique traversé par un courant, la convolution exprime ce fait fondamental que ce qui est accessible à l'observateur est le résultat du «mélange» (la convolution) d'un signal émis (le tremblement de terre, les émissions électromagnétiques stellaires ou un signal électrique) par les propriétés du système physique (Terre, milieu interstellaire et atmosphère, circuit électronique). L'ambition des physiciens est bien souvent de *déconvoluer* l'observation, c'est-à-dire de retrouver, soit le signal d'entrée, par exemple les caractéristiques du tremblement de Terre pour un sismologue qui s'intéresse à la source sismique, soit les caractéristiques du milieu physique, par exemple les propriétés élastiques de la Terre pour un sismologue s'intéressant à la structure de notre Globe.

### Excitation exponentielle

Après la source impulsionnelle  $e = \delta$  et sa réponse  $i$ , considérons maintenant le cas de la source exponentielle  $e(t) = \exp(pt)$ . La réponse d'un système linéaire à une telle source se calcule comme suit en terme de fonctions :

$$\begin{aligned} s(t) &= i(t) * \exp(pt) = \int i(\tau) \exp(p(t - \tau)) \, d\tau \\ &= \left\{ \int i(\tau) \exp(-p\tau) \, d\tau \right\} \exp(pt). \end{aligned}$$

C'est une équation de la forme  $i * \exp = \lambda \exp$ , ce qui signifie que les fonctions exponentielles sont des fonctions propres de l'opérateur de convolution. La valeur propre  $\lambda(p)$  est appelée transformée de Laplace de  $i$ . Pour  $p = 2j\pi\nu$  ( $j^2 = -1$ ),  $\hat{i} = \lambda(\nu)$  est appelée transformée de Fourier (TF) de  $i$ . La TF de la réponse impulsionnelle est souvent appelée *fonction de transfert*. Elle détermine le rapport entre les amplitudes de l'entrée et la sortie ainsi que leur déphasage.

Tout cela montre que si on «rentre» un signal sinusoïdal dans un système physique linéaire invariant, il en sort un signal sinusoïdal de même fréquence, propriété que l'on utilise souvent en physique.

Enfin, si l'on peut décomposer un signal d'entrée général en une combinaison linéaire de telles fonctions propres :

$$e(t) = \int \hat{e}(\nu) \exp(2j\pi\nu t) \, d\nu,$$

où  $\hat{e}(\nu)$  est justement la TF de  $e$ , alors par linéarité :

$$\begin{aligned} s(t) &= (e * i)(t) \\ &= \int \hat{e}(\nu) \exp(2j\pi\nu t) \, d\nu * i(t) \\ &= \int \hat{e}(\nu) \exp(2j\pi\nu t) * i(t) \, d\nu \\ &= \int \hat{e}(\nu) \hat{i}(\nu) \exp(2j\pi\nu t) \, d\nu, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $s$  est également décomposable en sinusoïdes :

$$s(t) = \int \hat{s}(\nu) \exp(2j\pi\nu t) \, d\nu,$$

avec :

$$\hat{s}(\nu) = \hat{e}(\nu) \hat{i}(\nu).$$

La comparaison avec la relation (1.24) montre que la transformée de Fourier transforme les produits de convolution en produits de fonctions. C'est ce que nous expliciterons en détail dans le chapitre consacré à la transformée de Fourier. Cette dernière relation simplifie (au moins en théorie) la recherche des inverses de convolution.

### Résolution d'équations différentielles

Nous proposons de montrer maintenant comment la convolution et les distributions permettent de résoudre élégamment des équations de la physique. En effet elles peuvent souvent s'écrire sous la forme d'une convolution :

$$A * X = B.$$

Par exemple une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 X(t) + a_1 X'(t) \dots a_n X^{(n)}(t) = B(t)$$

peut être mise sous la forme :

$$\left( a_0 \delta + a_1 \delta' + \dots + a_n \delta^{(n)} \right) * X = B.$$

La recherche d'une solution à cette équation passe par l'inverse de  $A$  (au sens de la convolution) défini par  $A * A^{-1} = \delta$ . Si cet inverse existe dans l'algèbre de  $B$  alors l'équation possède une solution unique donnée par :

$$X = B * A^{-1}.$$

L'oscillateur harmonique en est un exemple :

### L'oscillateur harmonique

Du point de vue des fonctions, le mouvement de l'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \tag{1.26}$$

étant entendu que les forces à l'origine du mouvement ont été appliquées à  $t \leq 0$ . L'équivalent de cette équation au sens des distributions intègre les conditions initiales par l'intermédiaire d'un second membre  $B$  :

$$X'' + \omega^2 X = B,$$

c'est-à-dire :

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * X = B.$$

Or on vérifie aisément que :

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * \frac{1}{\omega} H \sin(\omega t) = \delta,$$

où  $H$  est la distribution de Heaviside. Puisque  $\frac{1}{\omega} H \sin(\omega t) \in \mathcal{D}'_+$  (distributions à support borné à gauche), l'équation a une solution unique dans  $\mathcal{D}'_+$  pour tout  $B \in \mathcal{D}'_+$  :

$$X = B * \frac{1}{\omega} H \sin(\omega t).$$

Afin que  $X \in \mathcal{D}'_+$  pour que l'on puisse toujours la convoluer on pose  $X = Hx$ , ce qui revient à chercher les solutions de 1.26 pour  $t > 0$ . On détermine l'expression de  $B$  en cherchant alors l'équation que vérifie  $X$  :

$$X' = H'x + Hx' = \delta x + Hx' = \delta x(0) + Hx'$$

puisque  $x\delta = x(0)\delta$  (► relation qu'on pourra démontrer en exercice ◄). La dérivée seconde en découle :

$$X'' = \delta'x(0) + H'x' + Hx'' = x(0)\delta' + x'(0)\delta - H\omega^2x,$$

si bien que l'équation vérifiée par  $X$  s'écrit :

$$(\delta'' + \omega^2\delta) * X = x(0)\delta' + x'(0)\delta.$$

Le second membre  $B = x(0)\delta' + x'(0)\delta$  représente l'impulsion qu'il faudrait fournir au système à l'instant initial pour le faire passer instantanément du repos au mouvement cherché. La solution de l'oscillateur est donc :

$$X = \frac{1}{\omega}H \sin(\omega t) * (x(0)\delta' + x'(0)\delta).$$

Elle se réduit finalement à :

$$X(t) = H(t) \left( x(0) \cos(\omega t) + \frac{x'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$

### Convolution spatiale

La convolution n'est pas seulement utilisée dans le domaine temporel et dans les espaces à une dimension. Elle est très utile en théorie du potentiel (convolution spatiale) entre autres. Prenons comme exemple le potentiel de gravité  $V$  lié à la densité  $\rho$  par la relation de Biot et Savard :

$$V(r) = -G \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV(r') \quad (1.27)$$

qui peut être écrite sous la forme d'un produit de convolution :

$$V = -G\rho * \frac{1}{|r|}.$$

Cette relation peut être utilisée au sens des distributions, ce qui lui confère un sens plus général que la relation (1.27). On peut notamment calculer aisément le laplacien de  $V$  en utilisant  $\Delta[1/|r|] = -4\pi\delta$  (► relation qu'on pourra montrer en exercice ◄) :

$$\Delta V = -G\rho * \Delta[1/|r|] = 4\pi G\rho * \delta = 4\pi G\rho.$$

On reconnaît cette relation comme étant l'équation de Poisson, valable au sens des distributions. La même démonstration au sens des fonctions eut été plus délicate.

## Chapitre 2

# La transformée de Fourier

«... Ces phénomènes, très dissemblables en apparence, possèdent au fond la même structure, et, pour en avoir la clé, il suffit de savoir séparer en chacun d'eux la composante fondamentale et ses diverses harmoniques. C'est Fourier qui a trouvé cette clé, découverte dont l'importance a énormément dépassé le problème initial de la propagation de la chaleur, et qu'il expose dans son mémoire de 1812.»

Pierre Rousseau, Histoire de la Science.

La transformée de Fourier, qui généralise le développement en série de Fourier, trouve son utilité dans la résolution des équations aux dérivées partielles mais également en traitement du signal, notamment parce qu'elle permet de détecter les périodicités d'un signal, et parce qu'elle transforme la convolution en multiplication.

Nous définirons la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, puis celle d'une distribution tempérée, et donnerons leur propriétés essentielles. Les fonctions et distributions les plus utilisées seront passées en revue avant de terminer par la transformée de Fourier de fonctions de carré intégrable, qui représentent les signaux à énergie finie.

### 2.1 Un point de vue physique

Chacun a déjà utilisé la transformée de Fourier en physique. Prenons l'exemple classique de la corde vibrante. Son déplacement transversal  $u$  est soumis à l'équation d'onde :

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t). \quad (2.1)$$

Un façon classique de résoudre cette équation est de poser :

$$u(x, t) = U(x, \omega)e^{i\omega t}, \quad (2.2)$$

de sorte que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} U(x, \omega). \quad (2.3)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme  $e^{\pm i\omega x/c}$ , si bien que toute combinaison de telles solutions est aussi solution :

$$u(x, t) = \sum_{\omega} U(x, \omega)e^{i\omega t} = \sum_{\omega} U^{\pm}(\omega)e^{i\omega(t \pm x/c)} \quad (2.4)$$

Bien, mais pourquoi avons-nous choisit une solution de la forme (2.2), et qu'est-ce qui nous garantit que l'on a ainsi la solution générale ?

En fait, écrire la relation (2.2) revient à poser :

$$U(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.5)$$

où  $U$  est appelée transformée de Fourier temporelle de  $u$ . Un théorème fondamental de la théorie de la transformée de Fourier stipule que  $u$  est donnée par la formule inverse :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, \omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.6)$$

appelée transformée de Fourier inverse. Avec cette écriture de  $u$  la relation (2.1) équivaut alors à :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x, \omega) \right\} e^{i\omega t} d\omega = 0. \quad (2.7)$$

Par transformée de Fourier il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x, \omega) = 0 \quad \forall \omega, \quad (2.8)$$

qui est exactement la relation (2.3). Cela montre qu'écrire (2.2) revient exactement à prendre la transformée de Fourier de  $u$  pourvu que l'on somme, suivant la relation (2.6), les solutions ainsi obtenues. Voilà les changements de variables en  $e^{-i\omega t}$  justifiées par la théorie de la transformée de Fourier. Remarquez aussi que cette transformée permet de résoudre une équation *a priori* difficile à résoudre. Voilà une des raisons pour laquelle la transformée de Fourier est si importante en physique. Dans le cas de la corde vibrante, la solution générale s'écrit donc :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^{\pm}(\omega)e^{i\omega(t \pm x/c)} d\omega, \quad (2.9)$$

$U^\pm$  étant donné par les conditions aux limites et les conditions initiales.

Imposons maintenant que la corde soit fixe en ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ . De même que précédemment et par linéarité, les conditions aux limites  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  s'appliquent directement à la fonction  $U$  :

$$U(0, \omega) = U(L, \omega) = 0. \quad (2.10)$$

Si l'on écrit la solution  $U$  sous la forme :

$$U(x, \omega) = U^+(\omega)e^{i\omega x/c} + U^-(\omega)e^{-i\omega x/c},$$

alors la condition en  $x = 0$  impose  $U^+ + U^- = 0$ , c'est-à-dire :

$$U(x, \omega) = U_0(\omega) \sin(\omega x/c),$$

si bien que la deuxième condition aux limites impose :

$$\exists k \in \mathbb{Z}^*, \quad \omega = \omega_k = k\pi c/L. \quad (2.11)$$

Les pulsations possibles sont donc *indexées*, ou *quantifiées*, par un entier, exactement comme les niveaux d'énergie des électrons en mécanique quantique. Compte tenu du fait que  $u$  est réel, la solution générale s'écrit donc :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sin(k\pi x/L) \{U_k^c \cos(k\pi ct/L) + U_k^s \sin(k\pi ct/L)\}, \quad (2.12)$$

où  $U_k^c$  et  $U_k^s$  sont des coefficients réels déterminés par les conditions initiales. Cette solution est une série de Fourier à la fois temporelle et spatiale. Un milieu non borné a des vibrations qui peuvent être décomposées en une somme infinie et continue de sinusoides, et si le milieu est borné la somme devient discrète. Ces oscillations périodiques sont alors représentées par des séries de Fourier. C'est une façon de voir que ces dernières sont généralisées par la transformée de Fourier.

## 2.2 Les sinusoides, une base de fonctions

La définition (2.6) est analogue à la notion de développement d'un vecteur sur une base, ici une base de sinusoides. En effet, si une fonction  $f$  à variation bornée est périodique de période  $T$  alors elle peut s'écrire comme une série de Fourier, c'est-à-dire comme une somme infinie de sinusoides :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_k e^{2i\pi kt/T}, \quad (2.13)$$

ces sinusoides formant une base orthonormée de l'espace des fonctions de période  $T$  pour le produit scalaire (hermitien) :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt, \quad (2.14)$$

de sorte que les coefficients sont donnés par intégration de  $f$  :

$$F_k = \langle f | e^{2i\pi kt/T} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt. \quad (2.15)$$

Dans le cas où  $f$  n'est pas périodique, elle peut-être développable en une série non plus discrète mais continue de sinusoides ; on appelle alors *transformée de Fourier* les «coefficients» du développement, qui sont en fait représentés par une fonction.

## 2.3 Transformée de Fourier d'une fonction

### 2.3.1 Définition de la transformée de Fourier

#### Définition 10

Soit une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle transformée de Fourier (TF) de  $f$  la fonction  $F$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (2.16)$$

Soit une fonction  $F$ , on appelle transformée de Fourier inverse la fonction  $f$  :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (2.17)$$

On notera suivant les circonstances :

$$F = \hat{f} = TF(f) = \mathcal{F}(f), \quad \text{et :}$$

$$f = \check{F} = TF^{-1}(F) = \bar{\mathcal{F}}(F).$$

Connaissant  $F = \hat{f}$  on peut souvent revenir à  $f$  par application de la transformée de Fourier inverse, c'est-à-dire que :

$$f = TF^{-1}(F) = TF^{-1}(TF(f)), \quad (2.18)$$

si bien que  $TF^{-1}$  est bien l'opération inverse de  $TF$ . Évidemment tout n'est pas si simple, principalement parce que que la TF et la TF inverse ne sont pas toujours définies et que la TF inverse ne redonne pas toujours la fonction de départ. Un cas intéressant est celui des fonctions sommables qui constituent un ensemble de fonctions ayant de «bonnes» propriétés vis-à-vis de la TF.

#### Définition 11

Une fonction  $f$  est dite sommable si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  existe et est finie. On note  $\mathcal{L}^p$  l'espace des fonctions  $f$  telles que  $|f|^p$  est sommable. On dit que deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{L}^p$  sont égales presque partout (p.p.) si et seulement si  $\|f - g\|_p = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^p dt = 0$ .

Dans ces espaces, deux fonctions différentes peuvent avoir même intégrale. C'est le cas par exemple si elles ne diffèrent qu'en un nombre discret de points. Par conséquent  $\|f\|_p$  ne définit pas une norme mais ce que l'on appelle une semi-norme. En effet  $\|f\|_p = 0$  n'implique pas  $f = 0$  mais  $f = 0$  p.p. Pour ces raisons on définit les classes d'équivalence de fonctions intégrables :

### Définition 12

L'égalité presque partout définit une relation d'équivalence par :  $f \equiv g$  ssi elles sont égales p.p. On définit l'espace  $L^p$  comme la classe des fonctions de  $\mathcal{L}^p$ . Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont donc égales dans cet espace ssi :

$$\|f - g\|_p = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^p dt = 0.$$

La classe  $L^1$  des fonctions sommables est d'un grand intérêt pour la TF puisque :

- ✓ Toute fonction sommable a une TF. Celle-ci est continue, bornée, et  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} F(\nu) = 0$ .
- ✓ Si  $f$  et  $F \in L^1$  alors aux points où  $f$  est continue  $f = TF^{-1}(TF(f))$ .

### 2.3.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions sommables alors :

- ✓ La TF existe et est une transformation linéaire sur l'espace des fonctions sommables.
- ✓ Si  $f$  est réelle alors  $\widehat{\bar{f}}(\nu) = \widehat{f}(-\nu)$  (conjugaison).
- ✓  $f$  a la même parité que  $\widehat{f}$  (parité).
- ✓  $\widehat{\sigma f} = \sigma \widehat{f}$  c'-à-d.  $\widehat{f(-t)} = \widehat{f}(-\nu)$  (symétrie).
- ✓  $\widehat{\tau_a f}(\nu) = \widehat{f(t-a)}(\nu) = e^{-2i\pi a\nu} \widehat{f}(\nu)$  (translation).
- ✓  $\widehat{e_a f} = \frac{1}{|a|} e_{\frac{1}{a}} \widehat{f}$  c'-à-d.  $\widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$  si  $a \neq 0$  (changement d'échelle).
- ✓  $TF(\cos(2\pi\nu_0 t)f(t)) = \frac{1}{2} \left( \widehat{f}(\nu - \nu_0) + \widehat{f}(\nu + \nu_0) \right)$  (modulation).
- ✓  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$   $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$  (convolution).
- ✓  $\sup |\widehat{f}| \leq \|f\|_1 = \int |f|$  ( $\widehat{f}$  est bornée).
- ✓  $f, g \in L^1 \Rightarrow f\widehat{g}, \widehat{f}g \in L^1$  et  $\int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g$  (réciprocité).
- ✓  $\check{f} = \widehat{\bar{f}}$  c'-à-d.  $TF^{-1}(f) = \overline{TF(\bar{f})}$ .

## 2.4 Les fonctions à décroissance rapide

De nombreuses transformées de Fourier de fonctions utiles ne sont pas définies au sens des fonctions. En effet, si l'on voulait, par exemple, prendre la TF de 1 on écrirait :

$$TF(1) = \int e^{-2i\pi vt} dt,$$

expression qui n'a aucun sens. On définit donc la TF de distributions. Pour étendre la définition de la TF aux distributions on serait tenté d'écrire :

$$\langle \widehat{S}, \varphi \rangle = \langle S, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Il faudrait pour cela que  $\widehat{\varphi}$  appartienne à l'espace des fonctions tests  $\mathcal{D}$  ce qui n'est pas toujours vrai. Il faut définir un espace de fonctions tests qui est *stable* par TF. C'est le cas de :

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |t^\alpha \varphi^{(\beta)}(t)| < +\infty \right\}.$$

On l'appelle *espace des fonctions à décroissance rapide à l'infini* car il s'agit de fonctions  $C^\infty(\mathbb{R})$  dont toutes les dérivées décroissent plus vite que  $t^{-\alpha}$  à l'infini. Parmi ses propriétés en voici quelques unes qui nous intéressent particulièrement :

- ✓  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^1$ .
- ✓  $\mathcal{S}$  est une algèbre ( $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow (\varphi_1 \varphi_2) \in \mathcal{S}$ ) stable par dérivation et par TF.
- ✓ La TF est bijective de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  et  $TF^{-1}.TF = I$ .
- ✓  $\mathcal{S}$  est stable par convolution et  $\widehat{\varphi_1 * \varphi_2} = \widehat{\varphi_1} \widehat{\varphi_2}$ ,  $\widehat{\varphi_1 \varphi_2} = \widehat{\varphi_1} * \widehat{\varphi_2}$ .
- ✓  $\mathcal{S} \subset L^2$  et on a la formule de Plancherel :

$$\int \varphi_1 \overline{\varphi_2} = \int \widehat{\varphi_1} \overline{\widehat{\varphi_2}}.$$

- ✓ La formule de Parseval en découle :

$$\|\varphi\|_2 = \int |\varphi|^2 = \int |\widehat{\varphi}|^2 = \|\widehat{\varphi}\|_2.$$

- ✓  $\mathcal{S}$  est dense dans  $L^p$ .

La norme quadratique étant souvent associée à la notion d'énergie, la formule de Parseval indique la conservation de l'énergie par passage dans le domaine spectral. La densité de  $\mathcal{S}$  dans  $L^2$  permet de définir la TF dans  $L^2$ . La stabilité permet quant à elle de définir la TF d'une distribution définie sur cet espace de fonctions tests. Commençons par ce dernier point.

## 2.5 Les distributions tempérées

### Définition 13

On appelle distribution tempérée toute forme linéaire  $S$  continue sur  $\mathcal{S}$ ; la continuité s'écrit :

$$\exists c > 0, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathcal{S}, | \langle S, \varphi \rangle | \leq c \sum_{\alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^{\alpha'} \varphi^{(\beta')}(t)|.$$

L'ensemble des distributions tempérées est noté  $\mathcal{S}'$ .

### Définition 14

On définit la TF d'une distribution tempérée  $S$  par :

$$\langle \widehat{S}, \varphi \rangle = \langle S, \widehat{\varphi} \rangle,$$

et la TF inverse par :

$$\langle TF^{-1}(S), \varphi \rangle = \langle S, TF^{-1}(\varphi) \rangle.$$

Cette définition est justifiée par la formule de Plancherel. En effet pour une distribution régulière :

$$\langle [\widehat{h}], \varphi \rangle = \langle [h], \widehat{\varphi} \rangle = \int h \widehat{\varphi} \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \int \widehat{h} \varphi = \langle [\widehat{h}], \varphi \rangle.$$

On peut donner une expression de  $\widehat{S}$  qui ne fasse pas intervenir de fonction test; dans le cas où les expressions suivantes ont un sens :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}, \varphi \rangle &= \langle S, \widehat{\varphi} \rangle = \langle S(t), \int e^{-2i\pi\nu t} \varphi(\nu) d\nu \rangle \\ &= \langle S(t), \langle [\varphi](\nu), e^{-2i\pi\nu t} \rangle \rangle = \langle [\varphi](\nu), \langle S(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle \rangle \\ &= \int \varphi(\nu) \langle S(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle d\nu = \langle [\langle S(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle], \varphi(\nu) \rangle. \end{aligned}$$

Ceci conduit au :

**Théorème (non démontré) :**

Si  $S$  est portée par un compact,  $\widehat{S} = [\widehat{s}]$  est la distribution régulière définie par la fonction infiniment dérivable :

$$\widehat{s}(\nu) = \langle S(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle.$$

Ce théorème permet de calculer aisément certaines TF de distributions. Dans la pratique on confond souvent  $\widehat{S}$  et  $\widehat{s}$ .

Les propriétés des TF de fonctions  $L^1$  se conservent pour les fonctions à décroissance rapide et les distributions tempérées. Les fonctions  $\varphi \in \mathcal{S}$  ont

une propriété supplémentaire essentielle due à leur dérivabilité :

$$\begin{aligned} TF(\varphi') &= 2i\pi\nu TF(\varphi), \\ TF(\varphi)' &= -2i\pi TF(t\varphi). \end{aligned}$$

Ces deux relations duales transforment les dérivées en produit et sont encore vraies pour les distributions tempérées.

Enfin, au sens des distributions la limite d'une TF est la TF de la limite : Si la suite  $S_n$  de  $S'$  tend vers  $S$ , alors  $\widehat{S}_n$  tend vers  $\widehat{S}$ .

### Quelques démonstrations

Donnons quelques démonstrations des propriétés de la TF, les autres étant laissées à titre d'exercice. Celle de dérivation se montre par intégration par parties et en utilisant le fait que  $\varphi$  est nulle à l'infini :

$$\widehat{\varphi}'(\nu) = \int \varphi'(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = 2i\pi\nu \int \varphi(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = 2i\pi\nu\widehat{\varphi}(\nu).$$

Cela montre que  $\widehat{\varphi}$  est infiniment dérivable. Pour démontrer la stabilité de  $\mathcal{S}$  il ne reste plus à montrer qu'elle est à décroissance rapide :

$$\begin{aligned} \nu^\alpha \widehat{\varphi}^{(\beta)}(\nu) &= (-2i\pi)^\beta \nu^\alpha \widehat{t^\beta \varphi} = (-2i\pi)^\beta (2i\pi)^{-\alpha} \left( (2i\pi\nu)^\alpha \widehat{t^\beta \varphi} \right) \\ &= (-1)^\beta (2i\pi)^{\beta-\alpha} TF \left( (t^\beta \varphi)^{(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Une TF étant toujours bornée, cette dernière expression est bornée. Puisque  $\mathcal{S} \subset L^1$ , espace dans lequel on connaît l'inverse, la TF est inversible et  $TF.TF^{-1} = I$ .

### Exemples classiques

Donnons quelques exemples de TF de fonctions et de distributions :

Distributions		TF
$\Pi(t)$	$\longleftrightarrow$	$\text{sin}_c \nu$
$e^{-\pi t^2}$	$\longleftrightarrow$	$e^{-\pi \nu^2}$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1
$e^{2i\pi\nu_0 t}$	$\longrightarrow$	$\delta(\nu - \nu_0)$
$\text{shah}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\text{shah}(\nu)$
$\text{sgn}(t)$	$\longrightarrow$	$\text{v.p.} \frac{1}{i\pi\nu}$
$H(t)$	$\longrightarrow$	$\text{v.p.} \frac{1}{2i\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$
	$\longleftrightarrow$	

La fonction  $\Pi$  est la fonction «porte» entre  $-1/2$  et  $1/2$  :

$$\Pi = 1_{[-1/2;1/2]}.$$

Le sinus cardinal est défini par :

$$\operatorname{sin}_c \nu = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

La distribution «shah», appelée *peigne de Dirac*, est la série des dirac régulièrement espacés de l'unité :

$$\operatorname{shah}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n).$$

La fonction signe prend les valeurs :

$$\operatorname{sgn}(\nu) = \begin{cases} -1 & \nu < 0 \\ 1 & \text{si } \nu > 0 \\ 0 & \nu = 0. \end{cases}$$

Elle est donc reliée au Heaviside par :

$$H = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} + 1).$$

La valeur principale de  $1/t$  est la distribution définie par :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$[\ln |t|]' = \operatorname{v.p.} \frac{1}{t}, \quad t \operatorname{v.p.} \frac{1}{t} = [1].$$

On pourra démontrer ces TF en exercice. La démonstration la plus délicate est celle de  $TF(H)$ . Elle est donnée dans le dernier paragraphe à titre d'exemple. Les TF inverses sont évidentes en utilisant la propriété déjà énoncée :

$$TF^{-1}(f) = \widehat{\widehat{f}}.$$

Un moyen de se rappeler de cette propriété fondamentale est de l'écrire :

$$f = \widehat{\widehat{f}}.$$

Si  $f$  est réelle elle se traduit simplement par :

$$TF^{-1}(f)(\nu) = \widehat{f}(-\nu).$$

Les opérations TF et TF inverse sont donc identiques sur les distributions réelles paires, ce qui est indiqué par une flèche double dans le tableau.

### Un exemple : la TF d'une fonction périodique

Soit une fonction périodique  $f$  de période  $T$ . Elle est décomposable en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{2i\pi kt/T},$$

avec :

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt.$$

Une fonction périodique ne tend pas vers 0 en l'infini et n'est donc pas dans  $L^1$ . La TF de cette fonction n'est donc pas définie au sens des fonctions mais des distributions. Elle découle directement des résultats précédents :

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{2i\pi k \widehat{t}/T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \delta(\nu - k\nu_0),$$

où  $\nu_0 = 1/T$ . La TF d'une fonction périodique est une somme infinie de diracs, régulièrement espacées de la fréquence  $\nu_0$ , d'amplitudes égales aux coefficients de la série de Fourier. Cela montre qu'une représentation de  $\widehat{f}(\nu)$  en fonction de  $\nu$  donne le *contenu spectral* de  $f$ , c'est-à-dire l'amplitude de chacune des fréquences. La TF permet donc de détecter les périodicités d'un signal.  $F_0$  est la moyenne du signal ; on l'appelle parfois amplitude du *continu* parce qu'il représente la fréquence nulle.  $F_1$ , appelé mode fondamental, est situé à la fréquence  $1/T$  si bien que le premier dirac d'une TF donne la période du signal. Les autres pics sont appelés *harmoniques* et sont situés aux abscisses  $k\nu_0$ .

## 2.6 TF dans $L^2$

La classe des fonctions à décroissance rapide est trop restreinte pour représenter les signaux physiques, les signaux non dérivables par exemple. Les signaux physiques étant à énergie finie, la classe des fonctions de carré intégrable est donc plus intéressante pour les représenter. De plus  $L^2$  est un espace de Hilbert, c'est-à-dire que la limite de toute suite convergente de fonctions de  $L^2$  est dans  $L^2$ . La TF d'une fonction  $f \in L^2$  est définie par le second point du théorème suivant :

1)  $[f]$  est une distribution tempérée.

2)  $\widehat{[f]}$  et  $TF^{-1}[f]$  sont des distributions régulières définies par des fonctions de  $L^2$  que l'on note  $\widehat{f}$  et  $TF^{-1}(f)$ , et qui servent de définition à la TF et la TF inverse de  $f$ .

3) La TF et la TF inverse sont des isométries réciproques sur  $L^2$  :

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

## 2.7 Généralisation à $\mathbb{R}^n$

La généralisation à  $\mathbb{R}^n$  est immédiate. Soit  $f(\vec{t})$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sa TF à  $n$  dimensions est définie par :

$$\widehat{f}(\vec{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{t}) e^{-2i\pi\vec{t}\cdot\vec{\nu}} dt^n.$$

Les propriétés de la TF sur  $\mathbb{R}$  se généralisent à  $\mathbb{R}^n$ . La TF à  $n$  dimensions est souvent utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

## 2.8 Un exemple : la TF du Heaviside

On se propose de démontrer que :

$$\widehat{H} = \text{v.p.} \frac{1}{2i\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu).$$

On trouvera cette démonstration dans les livres de Boccara, p. 213 et de Roddier entre autres. Une première façon de faire est de calculer la TF de la fonction :

$$H_\epsilon(t) = \exp(-\epsilon t) H(t)$$

et d'utiliser  $H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon$ . On trouve aisément :

$$\widehat{H}_\epsilon(\nu) = \frac{1}{\epsilon + 2i\pi\nu} = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + 4\pi^2\nu^2} - i \frac{2\pi\nu}{\epsilon^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

On montre ensuite que la partie réelle tend vers la moitié du dirac et que la partie imaginaire tend vers une valeur principale.

Effectuons complètement la démonstration par une autre méthode. Elle consiste à prendre la TF de :

$$t \text{ v.p.} \frac{1}{t} = [1].$$

En utilisant la propriété  $-2i\pi t \widehat{f} = \widehat{f}'$  il vient :

$$\frac{d}{d\nu} TF \left( \text{v.p.} \frac{1}{t} \right) = -2i\pi\delta = -2i\pi H'.$$

Admettons pour l'instant que pour une distribution  $S$  quelconque,  $S' = 0$  équivaut à  $S = [\lambda]$ , où  $\lambda$  est une constante. Il en découle :

$$TF \left( \text{v.p.} \frac{1}{t} \right) = -2i\pi(H + [\lambda]).$$

La valeur principale étant impaire sa TF l'est également ; de :

$$H(-\nu) = 1 - H(\nu),$$

on déduit que  $\lambda = -1/2$ . Reste à prendre la TF inverse, c'est-à-dire à utiliser  $TF^{-1}(f) = \widehat{\widehat{f}}$ . On arrive ainsi au résultat souhaité.

Reste donc à démontrer que  $S' = 0 \Leftrightarrow S = [\lambda]$ . Seule l'implication est délicate la réciproque étant évidente. Supposons donc que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle S', \varphi \rangle = - \langle S, \varphi' \rangle = 0.$$

Il faut chercher les distributions qui s'annulent sur le sous-espace  $A$  de  $\mathcal{D}$  :

$$A = \{\varphi', \varphi \in \mathcal{D}\}.$$

Quelles sont ces fonctions tests ? Soit  $\psi$  dans  $\mathcal{D}$ , on peut intégrer  $\varphi' = \psi$  :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt.$$

Définie de la sorte  $\varphi$  est bien infiniment dérivable. Il reste à vérifier que son support est borné. C'est le cas si  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ . On voit ainsi que :

$$A = \{\psi \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi = 0\}.$$

Le problème se réduit donc à chercher  $S$  telle que :

$$\forall \psi \in A, \langle S, \psi \rangle = 0.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . L'astuce consiste alors à choisir une fonction  $\theta \in \mathcal{D}$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta = 1$  et à définir :

$$\psi = \varphi - \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi.$$

Cette fonction est dans  $A$  si bien que :

$$0 = \langle S, \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle - \langle S, \theta \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi,$$

c'est-à-dire :

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \theta \rangle \langle [1], \varphi \rangle.$$

Comme c'est vrai pour tout  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$ , cela démontre ce qu'il fallait avec  $\lambda = \langle S, \theta \rangle$ .

## Chapitre 3

# La TF Numérique

«... Actuellement, ces mesures directes sur l'enregistrement sont plutôt remplacées par des procédés plus automatiques : le développement des traitements de données sur ordinateur permet l'utilisation systématique des transformées de Fourier ; on peut traiter en même temps les données numérisées pour renforcer les signaux étudiés et calculer d'autres caractéristiques du spectre.»

Nelly Jobert, *Traité de géophysique interne*, 1973.

Depuis l'apparition des calculateurs électroniques, la transformée de Fourier est largement utilisée pour le traitement des signaux. Les différentes propriétés mathématiques des distributions, de la convolution et de la TF sont donc fondamentales pour le traiteur de signal. Mais il existe des problèmes d'ordre pratique liés au fait que les signaux numériques ne respectent pas les conditions d'application de ces propriétés. Dans la pratique les signaux ne sont pas connus continûment, ils sont généralement connus en des points régulièrement espacés ; on dit qu'ils sont *échantillonnés* à intervalles réguliers. Ils ne sont pas mesurés pendant un temps infini mais fini ; on dit qu'ils sont *tronqués*. Ce chapitre traite de ce type de problèmes pratiques, ainsi que des solutions généralement adoptées pour effectuer une analyse de Fourier sur un signal numérique. Chaque problème est abordé séparément.

### 3.1 Troncature

Un signal tronqué, de longueur  $T$ , peut s'écrire comme le produit du signal total par une fenêtre :

$$f_T(t) = f(t)\Pi_T(t), \quad (3.1)$$

où  $\Pi_T = 1_{[-T/2, T/2]}$  est la fonction porte de longueur  $T$  centrée à l'origine :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < T/2 \\ 0 & |t| \geq T/2. \end{cases}$$

La transformée de Fourier de la fonction tronquée est donc le résultat de la convolution de la fonction complète par la TF de la fenêtre :

$$\widehat{f}_T(\nu) = \widehat{f}(t) * \widehat{\Pi}_T(\nu).$$

La calcul de  $\widehat{\Pi}_T$  est immédiat :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_T(\nu) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{1}{-2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu t}]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} = T \operatorname{sin}_c(T\nu), \end{aligned}$$

si bien que :

$$\widehat{f}_T(\nu) = T \widehat{f}(\nu) * \operatorname{sin}_c(T\nu). \quad (3.2)$$

La TF du signal tronqué est donc une fonction dégradée de la TF du signal total puisque la convolution par le sinus cardinal «mélange» les valeurs de  $\widehat{f}$ .

Plus la longueur de la fenêtre est grande, moins la dégradation est importante. Pour le voir commençons par remarquer que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T = f \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_T = f,$$

ce qui, par TF, implique :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{f}_T(\nu) = \widehat{f}(\nu) * \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sin}_c(T\nu) = \widehat{f}(\nu).$$

Quand la longueur de la fenêtre tend vers l'infini, la TF du signal tronqué tend donc bien vers la TF du signal complet<sup>1</sup>.

Pour quantifier cet effet prenons comme exemple :

$$f(t) = 1 + \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t)$$

<sup>1</sup>Remarquons en passant que la relation

$$\widehat{f}(\nu) * \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sin}_c(T\nu) = \widehat{f}(\nu),$$

montre que la limite du sinus cardinal est l'élément neutre pour la convolution, c'est-à-dire que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sin}_c(T\nu) = \delta(\nu).$$

Voilà encore une autre fonction dont la limite est le dirac.

avec  $\nu_2 > \nu_1$ . La TF du cosinus a été donnée dans la partie précédente :

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{1}{2} (2\delta(\nu) + \delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1) + \delta(\nu - \nu_2) + \delta(\nu + \nu_2)),$$

si bien que :

$$\widehat{f}_T(\nu) = \frac{T}{2} \left\{ 2 \operatorname{sin}_c(T\nu) + \operatorname{sin}_c(T(\nu - \nu_1)) + \operatorname{sin}_c(T(\nu + \nu_1)) \right. \\ \left. + \operatorname{sin}_c(T(\nu - \nu_2)) + \operatorname{sin}_c(T(\nu + \nu_2)) \right\}.$$

La TF est donc composée de cinq sinus cardinaux au lieu de cinq dirac comme dans le cas idéal d'un signal de longueur infini. Ces sinus cardinaux interfèrent entre eux d'autant plus que leur largeur est grande devant leur espacement (cf. figure 3.1).

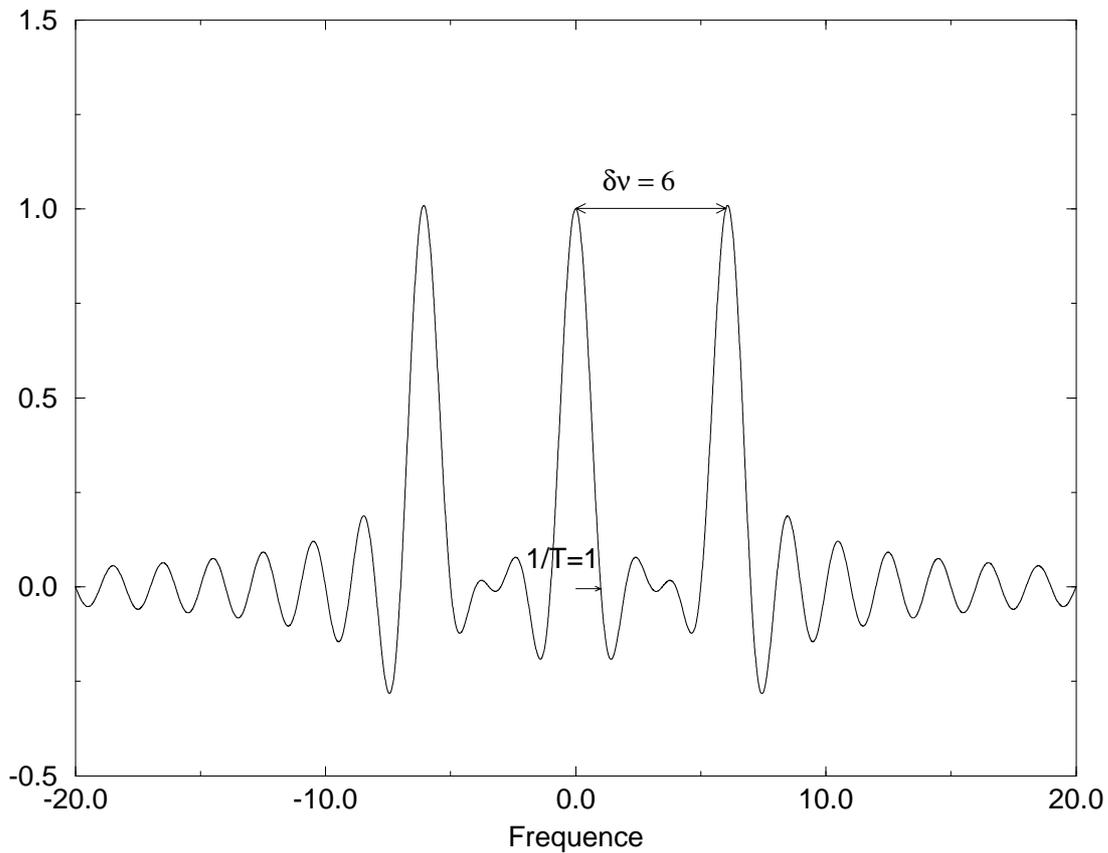


FIG. 3.1 – Somme de trois sinus cardinaux :  $F(\nu) = \operatorname{sin}_c(\nu) + \operatorname{sin}_c(\nu - 6) + \operatorname{sin}_c(\nu + 6)$  ; cette fonction représente la TF de la somme de deux sinusoïdes de fréquences  $\nu_1 = 0$  et  $\nu_2 = 6$  multipliée par une porte de longueur  $T = 1$ . Les pics sont bien séparés parce que  $\delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 6 > 1 = 1/T$ .

On dit qu'on peut encore raisonnablement séparer chaque sinus cardinal individuellement, c'est-à-dire déterminer la fréquence de chacune des sinusoïdes, si la largeur des sinus cardinaux est plus petite que leur espacement. Ces sinus passant par zéro à une distance  $1/T$  de leur centre, cette condition peut s'écrire :

$$1/T < \nu_1 \quad \text{et} \quad 1/T < \nu_2 - \nu_1.$$

La fréquence  $\nu_0 = 1/T$  est donc la plus basse fréquence que l'on peut extraire d'un signal de longueur  $T$ . Ce résultat est conforme à l'intuition. De plus, la fréquence  $\nu_0$  représente le pouvoir séparateur entre deux fréquences. Dans la pratique on adopte un pas en fréquence, c'est-à-dire un pouvoir séparateur, de  $\nu_0$ . Cela est résumé par la :

**Propriété :** D'un signal de longueur  $T$ , on ne peut pas séparer par transformée de Fourier les composantes fréquentielles distantes de moins de  $\nu_0 = 1/T$ .

On représentera donc numériquement les TF aux fréquences<sup>2</sup> :

$$\nu = 0, \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots,$$

La fréquence nulle est particulière puisque l'amplitude correspondante représente la moyenne du signal.

## 3.2 Échantillonnage

### 3.2.1 Représentation du signal échantillonné

Un signal physique  $f(t)$  est le plus souvent représenté dans la pratique par une série de valeurs discrètes, en des points régulièrement espacés. L'espacement, appelé *pas d'échantillonnage*, sera noté  $T_e$ . Par ailleurs, les valeurs de la fonction aux différents points seront notées :

$$f_n = f(t_n) = f(nT_e) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dans l'absolu la TF est donc inaccessible. Il faut se résoudre à supposer que ces valeurs représentent une «moyenne» de  $f$  autour de  $t_n$ . On peut alors approcher l'intégrale :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

par un schéma d'intégration numérique de type Gauss :

$$\hat{f}(\nu) \simeq \hat{f}_e(\nu) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-2i\pi\nu n T_e}. \quad (3.3)$$

<sup>2</sup>Les propriétés d'échantillonnage vont montrer, par la suite, pourquoi il faut échantillonner la TF avec un pas *d'au plus*  $\nu_0$ .

Cette fonction est périodique de période  $\nu_e = 1/T_e$ . J'appellerai *TF numérique* ce schéma. Exprimons cela en terme de distributions :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)e^{-2i\pi\nu nT_e} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta(t-n), f(tT_e)e^{-2i\pi\nu tT_e} \rangle \\ &= \langle \text{shah}(t), f(tT_e)e^{-2i\pi\nu tT_e} \rangle \\ &= \frac{1}{T_e} \langle \text{shah}(t/T_e), f(t)e^{-2i\pi\nu t} \rangle \\ &= \frac{1}{T_e} \langle \text{shah}(t/T_e)f(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que la TF numérique  $\hat{f}_e$  peut-être considérée comme la TF d'une distribution<sup>3</sup> :

$$\hat{f}_e = TF(\text{shah}(t/T_e)f(t)).$$

C'est pourquoi on appelle usuellement échantillonnage de  $f$  au pas  $T_e$  la distribution :

$$f_e(t) = \text{shah}(t/T_e)f(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\delta(t-nT_e), \quad (3.4)$$

si bien que :

$$\hat{f}_e = TF(f_e).$$

La TF numérique est donc la TF du peigne de dirac dont les amplitudes ont pour valeurs celles prises par la fonction aux points d'échantillonnage.

Remarquons que pour toute fonction test  $\varphi$  :

$$\langle f_e, \varphi \rangle = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\varphi(nT_e) \xrightarrow{T_e \rightarrow 0} \int f\varphi = \langle [f], \varphi \rangle,$$

si bien que :

$$\lim_{T_e \rightarrow 0} \hat{f}_e = [f],$$

ce qui était attendu<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>en admettant que l'expression  $\langle \text{shah}(t/T_e)f(t), e^{-2i\pi\nu t} \rangle$  soit bien la TF de la distribution  $\text{shah}(t/T_e)f(t)$ , ce qui est vrai si  $f$  est à support borné.

<sup>4</sup>Au passage, cela montre que le peigne de dirac —contracté par le pas  $T_e$ — tend vers [1] quand le pas tend vers 0.

### 3.2.2 Duplication spectrale

L'effet de l'échantillonnage est aisé à décrire si l'on effectue la TF de la relation (3.4) :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_e &= TF(\text{shah}(t/T_e)) * TF(f) = T_e \text{shah}(\nu T_e) * TF(f) \\ &= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(T_e \nu - n) * \widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu - n/T_e).\end{aligned}$$

La TF numérique  $\widehat{f}_e$  est donc constituée d'une infinité de duplicata de  $\widehat{f}$  espacés de la *fréquence d'échantillonnage*  $\nu_e = 1/T_e$ . On appelle ce phénomène la *duplication spectrale*. La fonction  $\widehat{f}_e$  est périodique de période  $\nu_e$ .

### 3.2.3 Repliement spectral et fréquence de Nyquist

Fatalement, les duplicata se recourent, ce qui fausse l'analyse fréquentielle. Pour que les duplicata n'interfèrent pas il faut, d'une part que la TF soit à support borné, d'autre part que ce support soit moins grand que la fréquence d'échantillonnage (cf. figure 3.2). Cela conduit au :

Critère de Shannon-Nyquist.

Soient les deux conditions :

1.  $|\widehat{f}|$  est à support borné, c'est-à-dire que  $\exists \nu_c, \widehat{f}(\nu) = 0$  si  $|\nu| > |\nu_c|$ .
2.  $\nu_e = 1/T_e > 2\nu_c$ .

Ces deux conditions constituent le critère de Shannon-Nyquist. Si elles sont respectées alors les duplicata de la TF échantillonnée ne se recouvrent pas. Dans le cas contraire on parle de *repliement spectral*<sup>5</sup>. La fréquence limite  $\nu_N = \nu_e/2$  est appelée *fréquence de Nyquist*, et correspond à la plus haute fréquence déterminable par TF d'un signal échantillonné. La deuxième condition s'écrit aussi : pour extraire d'un signal sa composante de fréquence  $\nu$  il faut que  $\nu_e > 2\nu$ , c'est à dire que le signal soit échantillonné à au moins  $2\nu$ .

Dans la pratique la première condition n'est pas respectée car le signal étant de longueur finie sa TF est de longueur infinie. Cette condition est donc remplacée par « $|\widehat{f}|$  décroît rapidement au delà de  $\nu_N$ ».

Quand on suspecte la présence d'une partie de plus haute fréquence dans le signal à analyser, on applique donc, avant numérisation, un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure inférieure à la fréquence de Nyquist.

On peut montrer que si le critère de Shannon-Nyquist est respecté alors (théorème d'échantillonnage)  $\widehat{f}_e(\nu) = \widehat{f}(\nu)$  si et seulement si :

$$f(t) = f_e(t) * 2\nu_c \text{sinc}(2\nu_c t). \quad (3.5)$$

Cela constitue une condition de validité du schéma d'intégration 3.3.

<sup>5</sup>ou *aliasing*.

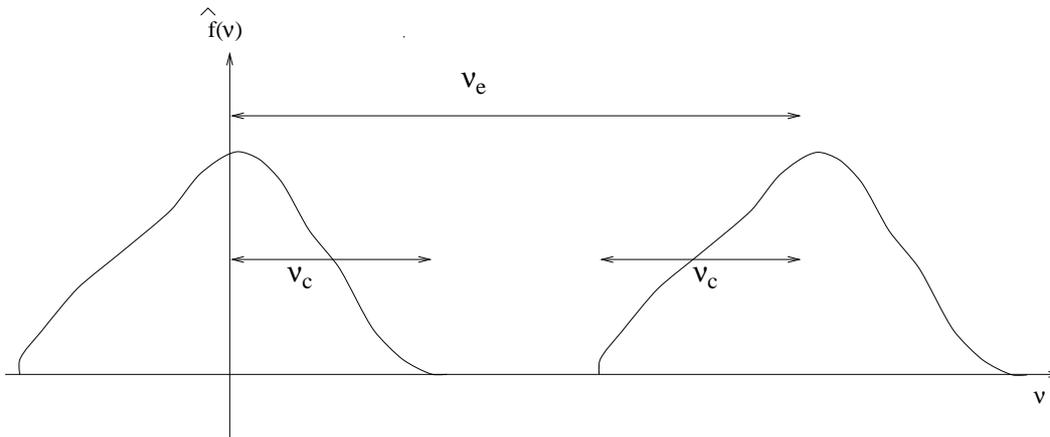


FIG. 3.2 – TF de longueur  $2\nu_c$  d'un signal échantillonné à  $T_e = 1/\nu_e$ . Dans le cas de cette figure  $2\nu_c < \nu_e$  donc il n'y a pas de repliement spectral.

### 3.3 Le calcul classique : les TF discrète et rapide

#### 3.3.1 Échantillonnage en fréquence

L'étude de la troncature a montré qu'il était suffisant de calculer la TF aux points<sup>6</sup> :

$$\nu = 0, \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots, \quad \text{avec } \nu_0 = 1/T,$$

et l'effet de l'échantillonnage rend illusoire le calcul sur une longueur  $2\nu_c$  supérieure à la fréquence de Nyquist. La TF numérique étant périodique, cela revient à dire qu'il suffit de la calculer sur une période, c'est-à-dire sur une longueur  $\nu_e$ , et que l'on peut choisir comme premier point n'importe lequel. On choisit généralement la fréquence nulle. On détermine donc numériquement la TF aux points :

$$\nu = 0, \nu_0, 2\nu_0, \dots, K\nu_0 \quad \text{avec } K\nu_0 = \frac{K}{T} < \nu_e = 1/T_e.$$

Le pas d'échantillonnage et la longueur étant liés au nombre  $N$  de points du signal par<sup>7</sup> :

$$T = NT_e,$$

la condition de Nyquist s'écrit :

$$\frac{K}{T} < \nu_e = 1/T_e = \frac{N}{T},$$

<sup>6</sup>La limitation supérieure du pas en fréquence provient quant à elle de l'utilisation duale du critère de Nyquist : pour qu'il y ait non repliement du signal temporel par discrétisation dans le domaine spectral, il faut que le pas d'échantillonnage en fréquence soit inférieur à l'inverse de la longueur du signal temporel.

<sup>7</sup>C'est bien  $T = NT_e$  et pas  $T = (N - 1)T_e$  car chacun des  $N$  points représente une longueur  $T_e$  de signal.

c'est-à-dire  $K = N - 1$ . Cela conduit à la définition de la TF discrète.

### 3.3.2 La TF discrète ou TFD

Soit un signal  $f$  de longueur  $T$ , échantillonné sur les  $N$  points :

$$t_n = \frac{n}{N}T = nT_e \quad \text{avec } n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Soient  $f_n = f(t_n)$  les valeurs en ces points, soit  $\nu_0$  le «pas d'échantillonnage spectral». On appelle «TF discrète» la TF numérique échantillonnée aux points :

$$\nu_k = k\nu_0 = \frac{k}{T} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

La TF discrète a pour expression :

$$F_k = \hat{f}_e(\nu_k) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-2i\pi \frac{kn}{N}\right) \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

La TF inverse discrète a pour expression :

$$f_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp\left(2i\pi \frac{kn}{N}\right) \quad \text{avec } n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Dans les définitions des TF discrètes les facteurs devant les sommes diffèrent suivant les ouvrages et les logiciels de calcul. Il ne faudra ni s'en étonner ni l'oublier. J'ai quant à moi préféré garder le temps  $T$ .

Si l'on pose  $W = \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)$  alors la TFD s'écrit :

$$F_k = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nk} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{T}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & W & W^2 & \cdots \\ 1 & W^2 & W^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & W^{kn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$F = \frac{T}{N} \mathcal{W}f$$

sous forme matricielle compacte. On montre aisément que  $\mathcal{W}\mathcal{W}^* = NI$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{W}^{-1} = \mathcal{W}^*/N$  si bien que :

$$f = \frac{1}{T}\mathcal{W}^*F.$$

Sous forme matricielle développée cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \cdots \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \cdots \\ & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & W^{-kn} & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \end{pmatrix},$$

ce qui correspond bien à la définition de la TFD inverse. Le calcul effectif d'une TFD sur  $N$  points nécessite  $N^2$  opérations<sup>8</sup>.

### 3.3.3 La TF rapide ou FFT

On préfère dans la pratique utiliser une astuce qui permet de réduire considérablement le nombre d'opérations. D'une TF de longueur  $N$  on se ramène à deux TF de longueur  $N/2$ . En supposant que  $N$  pair, notons  $N = 2p$ . On décompose  $f$  en deux signaux entrelacés  $f^1$  et  $f^2$  :

$$f_n^1 = f_{2n} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, p-1,$$

$$f_n^2 = f_{2n+1} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

La TF peut alors être décomposée sous la forme :

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n} W^{2nk} + \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_{2n+1} W^{(2n+1)k} \\ &= \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^1 (W^2)^{nk} + \frac{T}{N} W^k \sum_{n=0}^{p-1} f_n^2 (W^2)^{nk} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Pour voir à quoi correspondent ces sommes calculons la TF de  $f^1$ . Il s'agit de  $f$  échantillonnée à  $2T_e$ , c'est-à-dire de la relation (3.3) en remplaçant  $T_e$  par  $2T_e$  :

$$F_k^1 = TF(f^1) = \widehat{f^1}_e(\nu_k) = 2T_e \sum_{n=0}^{p-1} f_n^1 \exp(-2i\pi k \nu_0 n 2T_e)$$

<sup>8</sup>Une opération étant entendue comme une multiplication et une addition.

$$= 2 \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^1(W^2)^{nk}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, p-1.$$

De même :

$$F_k^2 = 2 \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^2(W^2)^{nk},$$

si bien que :

$$F_k = \frac{1}{2} \left( F_k^1 + W^k F_k^2 \right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Pour  $k = p, p+1, \dots, 2p-1$ , on remplace  $k$  par  $k+p$ , et on utilise  $W^p = -1$  dans la somme :

$$\begin{aligned} F_{k+p} &= \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^1(W^2)^{n(k+p)} + \frac{T}{N} W^{k+p} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^2(W^2)^{n(k+p)} \\ &= \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{p-1} f_n^1(W^2)^{nk} - \frac{T}{N} W^k \sum_{n=0}^{p-1} f_n^2(W^2)^{nk} \\ &= \frac{1}{2} \left( F_k^1 - W^k F_k^2 \right). \quad \forall k = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

En résumé pour tout  $k = 0, 1, \dots, p-1$  :

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{2} \left( F_k^1 + W^k F_k^2 \right) \\ F_{k+p} &= \frac{1}{2} \left( F_k^1 - W^k F_k^2 \right). \end{aligned}$$

La TF de longueur  $N$  se réduit donc à deux TF de longueur  $p = N/2$ . Si  $N = 2^m$  on peut répéter  $m$  fois l'opération jusqu'à ce que la longueur soit égale à deux. C'est cette méthode qui est appelée TF rapide, ou FFT (Fast Fourier Transform). À chacun des  $m$  stades il y a  $N$  opérations à effectuer, si bien que le nombre d'opérations pour la FFT est de :

$$Nm = N \frac{\log N}{\log 2} = N \log_2 N,$$

ce qui diminue grandement le nombre d'opérations par rapport à la TFD. Soit le rapport du nombre d'opérations pour la TFD de celui pour la FFT :

$$\mathcal{R} = \frac{N}{m} = \frac{N}{\log_2 N}.$$

On trouve les valeurs suivantes :

m	N	$\mathcal{R}$
8	256	32
9	512	57
10	1024	102
11	2048	186
12	4096	341
13	8192	630
14	16384	1170

L'utilisation de la FFT engendre donc des gains de temps de calcul (très) appréciables par rapport à celle de la TFD. Dans la pratique, si  $N$  est différent d'une puissance de deux, on ajoute des zéros au signal jusqu'à ce que ce soit le cas<sup>9</sup>.

### 3.4 Fenêtres d'apodisation

La troncature a plusieurs effets, dont le premier a déjà été décrit :

- limitation de la résolution fréquentielle,
- perturbation des pics de moindre énergie par les lobes secondaires des parties énergétiques<sup>10</sup>,
- apparition de hautes fréquences car le sinus cardinal n'est pas à support borné; par retour au domaine temporel et du fait de l'échantillonnage spectral, cela se traduit par des oscillations rapides au voisinage des bords<sup>11</sup>.

Ces deux derniers effets fâcheux peuvent-être atténués en utilisant une fenêtre d'apodisation, c'est-à-dire en multipliant le signal réel par une fenêtre bien choisie, dont la TF a des lobes secondaires atténués par rapport à ceux du sinus cardinal. La diminution d'amplitude des lobes se fait au détriment de la résolution, c'est-à-dire que la largeur du pic central est plus importante que celle du sinus cardinal (cf. figure 3.3). Il faut donc faire un compromis.

Une famille de telles fenêtres est donnée par :

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi t/T) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2. \end{cases}$$

Si  $\alpha = 1$  on retrouve la fenêtre rectangulaire,

si  $\alpha = 1/2$  on a la fenêtre de Hanning,

si  $\alpha = 0,54$  on a la fenêtre de Hamming.

La fenêtre de Hanning :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi t/T)) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2, \end{cases}$$

<sup>9</sup>On appelle souvent cette opération *padding*, qui signifie «remplissage».

<sup>10</sup>Ce phénomène est appelé *leakage*, qui signifie «fuite, perte».

<sup>11</sup>Ce phénomène est appelé *phénomène de Gibbs*.

s'écrit sous forme discrète :

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi n/N)) & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{si } |n| > N/2, \end{cases}$$

La TF de la fenêtre de Hanning vaut :

$$F(\nu) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} (1 + \cos(2\pi t/T)) e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

... calcul calcul calcul...

$$F(\nu) = \frac{T}{2} \frac{\text{sin}_c(\nu T)}{1 - (\nu T)^2}.$$

Elle se comporte comme un sinus cardinal au voisinage de l'origine, mais ses lobes sont atténués, à l'infini, par le dénominateur (cf. figure 3.3).

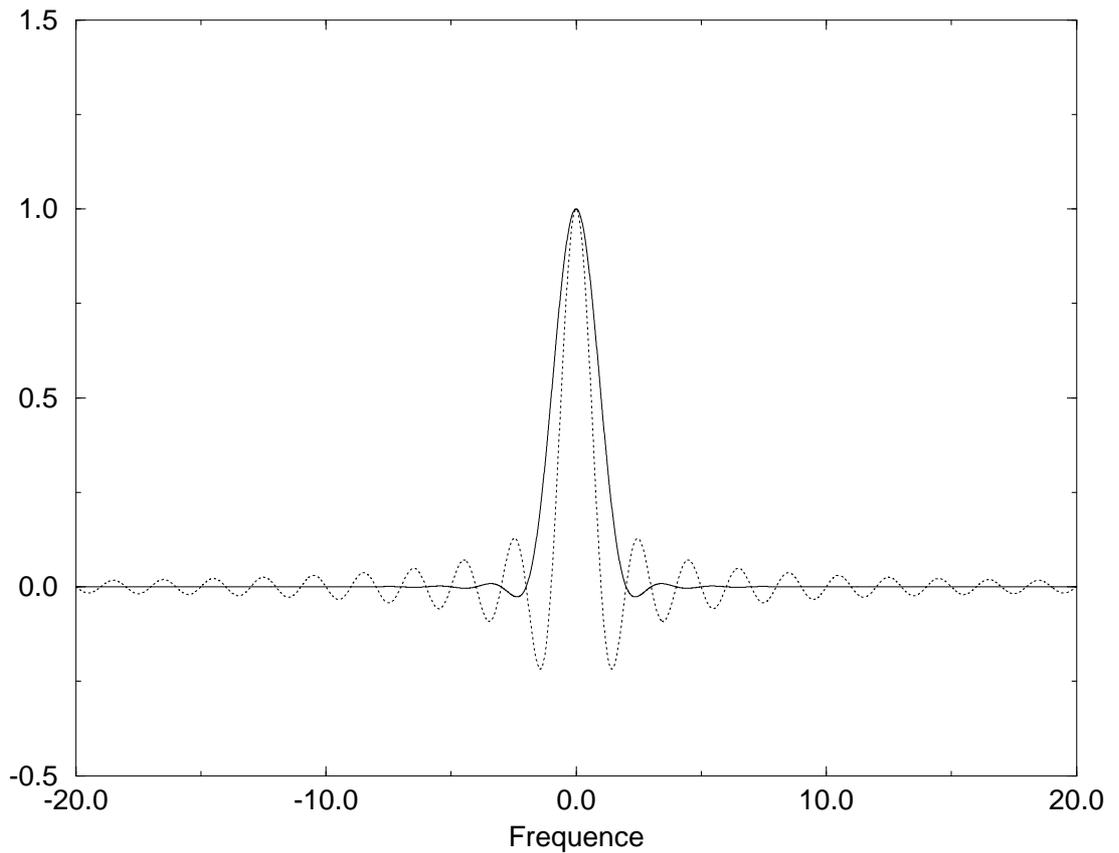


FIG. 3.3 – TF (multipliée par 2) de la fenêtre de Hanning de largeur  $T = 1$  (trait plein) et TF de la fenêtre rectangulaire (trait pointillé).

### 3.5 Effet d'un tendance

On appelle «tendance» la partie du signal de période plus longue que sa longueur. Seule la partie moyenne de la tendance est intégrée dans l'amplitude spectrale de fréquence nulle. La tendance perturbe donc les amplitudes spectrales de basses fréquences. Pour éliminer cette fuite d'énergie due à la discrétisation spectrale et aux lobes secondaires éventuels, il faut retirer la tendance du signal à traiter. Cela se fait autant que possible par une modélisation physique de celle-ci, sinon par un ajustement purement numérique. Le cas le plus simple est celui où la moyenne du signal est non nulle. On devra, quel que soit le problème physique sous-jacent, retirer cette moyenne.

Illustrons ce problème sur une tendance linéaire, tendance typique d'une dérive instrumentale. Représentons donc le signal avec dérive, comme la somme du signal «physique» et de la dérive :

$$f_d(t) = f(t) + \lambda t.$$

La TF étant linéaire :

$$\widehat{f}_d(t) = \widehat{f}(t) + \lambda \widehat{t}.$$

Il faut déterminer la TF de la dérive ; prenons une dérive de moyenne nulle :

$$\widehat{t} = \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Après un calcul simple, on montre que :

$$\widehat{t}(\nu) = \frac{i}{2(\pi\nu)^2} \{(\pi\nu T) \cos(\pi\nu T) - \sin(\pi\nu T)\}.$$

Cette fonction est bornée, comme il se doit pour la TF d'une fonction de  $L^1$  ; en effet elle tend vers zéro à l'origine et à l'infini. Elle présente un maximum à proximité de  $\nu = 1/T$ , ce qui veut dire que c'est à basse fréquence que le spectre sera le plus perturbé (cf. figure 3.4). L'amplitude de la perturbation, et le nombre de fréquences perturbées, dépendent alors de la valeur de «l'amplitude»  $\lambda$  de la dérive. Les pics de basses fréquences peuvent disparaître si celle-ci est trop importante.

### 3.6 La modulation d'amplitude

La modulation (d'amplitude) intervient quand un signal de longue période est multiplié (et non pas ajouté comme pour la tendance) par un signal de plus courte période<sup>12</sup>. C'est pour cette raison que nous avons précédemment appelé modulation la propriété suivante :

$$TF(\cos(2\pi\nu_0 t) f(t)) = \frac{1}{2} \left( \widehat{f}(\nu - \nu_0) + \widehat{f}(\nu + \nu_0) \right).$$

<sup>12</sup>C'est le cas des signaux des radios à modulation d'amplitude (AM-MA), pour lesquels le signal musical est multiplié par une «porteuse». La modulation de fréquence (FM) consiste quant à elle à faire varier la fréquence.

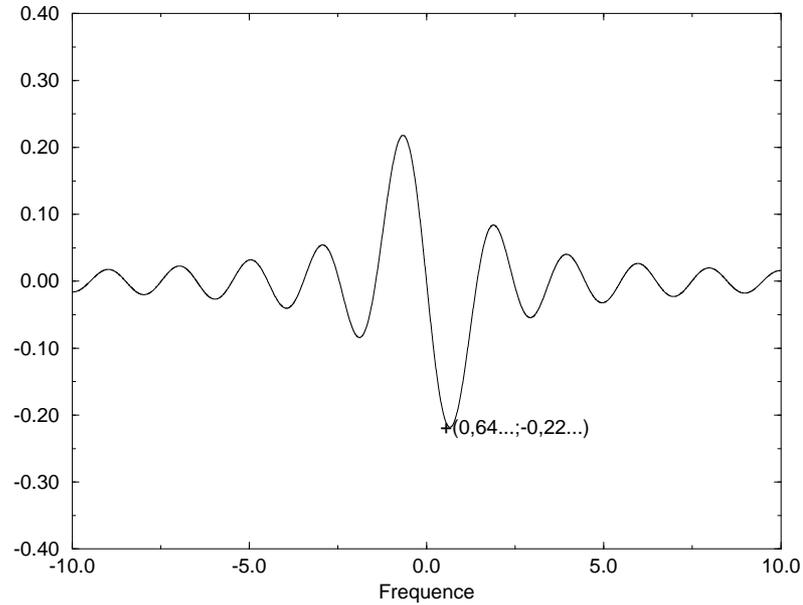


FIG. 3.4 – *Partie imaginaire de la TF de la tendance* :  $\hat{t}(\nu) = \frac{1}{2(\pi\nu)^2} \{(\pi\nu T) \cos(\pi\nu T) - \sin(\pi\nu T)\}$ .

Afin d'illustrer l'effet de la modulation, considérons l'exemple :

$$f(t) = \cos(2\pi\nu_1 t)(1 + \lambda \cos(2\pi\nu_0 t)).$$

Alors :

$$TF(f) = TF(\cos(2\pi\nu_1 t)) * TF(1 + \lambda \cos(2\pi\nu_0 t)).$$

$$= \frac{1}{2}(\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)) * \left( \delta(\nu) + \frac{\lambda}{2}(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1) \right)$$

$$+ \frac{\lambda}{2}(\delta(\nu - \nu_0 - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_0 - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_0 + \nu_1) + \delta(\nu - \nu_0 + \nu_1))$$

Considérons uniquement les fréquences positives puisque le spectre est symétrique. La TF montre des pics aux fréquences  $\nu_1$ ,  $\nu_1 + \nu_0$  et  $\nu_1 - \nu_0$ . Avec ce type de signal, non seulement il n'apparaît pas de pic à la fréquence  $\nu_0$ , mais le pic à  $\nu_1$  est entouré de deux pics à distance  $\nu_0$ , c'est à dire très proches si, par exemple,  $\nu_1 \gg \nu_0$ .

### 3.7 La TF est complexe

Le signal de départ est le plus souvent bien réel, et pourtant sa TF est complexe, ce qui nous oblige à préciser quelques points de détail. Rappelons la définition de la TF :

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

On appelle «phase»  $\varphi$  l'argument du nombre complexe  $\widehat{f}(\nu)$  :

$$\widehat{f}(\nu) = |\widehat{f}(\nu)|e^{i\varphi(\nu)}.$$

Pour représenter  $\widehat{f}(\nu)$  il suffit de représenter :

- soit les parties réelles et imaginaires de  $\widehat{f}$ ,
- soit son module et sa phase,
- soit le carré du module et la phase.

On appelle *spectre* la représentation de  $f$  dans le domaine des fréquences, c'est-à-dire  $\widehat{f}(\nu)$ . Souvent on se contente de représenter :

- le module  $|\widehat{f}(\nu)|$ , que l'on appelle **spectre d'amplitude**,
- ou son carré  $|\widehat{f}(\nu)|^2$ , que l'on appelle **spectre de puissance**.

L'énergie totale d'un signal étant définie par :

$$\|f\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu = \|\widehat{f}\|_2,$$

elle se conserve par passage au domaine spectral et  $|\widehat{f}(\nu)|^2$  est une densité d'énergie dans le domaine spectral.

Une simplification intervient si  $f$  est réelle. En effet dans ce cas on montre aisément que :

$$\widehat{f}(-\nu) = \overline{\widehat{f}(\nu)},$$

si bien que la connaissance de  $\widehat{f}$  sur les fréquences positives suffit à la décrire. C'est pourquoi on ne représente le plus souvent que la partie positive des fréquences. Examinons la signification des fréquences négatives en sommant deux composantes symétriques :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t} + \widehat{f}(-\nu)e^{-2i\pi\nu t} &= \widehat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t} + \overline{\widehat{f}(\nu)}e^{-2i\pi\nu t} \\ &= |\widehat{f}(\nu)|(e^{i\varphi(\nu)}e^{2i\pi\nu t} + e^{-i\varphi(\nu)}e^{-2i\pi\nu t}) \\ &= 2|\widehat{f}(\nu)|\cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) \\ &= 2|\widehat{f}(\nu)|(\cos(2\pi\nu t)\cos\varphi - \sin(2\pi\nu t)\sin\varphi) \\ &= 2\widehat{f}_{\cos}(\nu)\cos(2\pi\nu t) + 2\widehat{f}_{\sin}(\nu)\sin(2\pi\nu t). \end{aligned}$$

Ces relations montrent que la phase de la TF, c'est-à-dire son caractère imaginaire, est liée à la phase  $\varphi$  d'une sinusoïde  $A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$  dans une représentation réelle. Cette phase ne renseigne que sur la «position horizontale»

de la sinusoïde, pas sur son amplitude. Il arrive donc que la connaissance du spectre de phase  $\varphi(\nu)$  ne présente pas beaucoup d'intérêt ; dans ce cas on ne représente que le module.

## Chapitre 4

# Compléments

«... la vitesse de phase est calculée en effectuant la différence des phases qui est aussi la phase de la transformée de la fonction d'intercorrélation entre les enregistrements en deux stations... On peut aussi par des procédés de fenêtre glissante ou de filtrage multiple, obtenir par transformation de Fourier un diagramme donnant la répartition d'énergie en fonction du temps et de la période de chaque composante spectrale : le lieu des maxima d'énergie est la courbe de dispersion cherchée.»

Nelly Jobert, *Traité de géophysique interne*, 1973.

Dans beaucoup de cas la transformée de Fourier n'est pas un outil suffisant pour appréhender un signal. Il en existe d'autres, plus ou moins classiques, dont le choix dépend du signal à traiter et de ce qui intéresse le traiteur. Parmi ceux-ci, le filtrage linéaire peut être un moyen d'extraire une partie du signal située dans une gamme de fréquence donnée. La corrélation permet, entre autres, d'appréhender les bruits aléatoires contenus dans un signal. Très utilisée depuis quelques années l'analyse temps-fréquence offre quant à elle la possibilité de représenter le signal simultanément dans les domaines temporel et fréquentiel. Ce chapitre traite succinctement de ces quelques outils devenus classiques.

## 4.1 Transformée en $Z$

Rappelons que l'on a défini la TF numérique de  $f_n$  par :

$$\hat{f}(\nu) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-2i\pi\nu n T_e}. \quad (4.1)$$

Posons maintenant :

$$Z = e^{-2i\pi\nu T_e},$$

$$\vec{f} = (\dots, f_{-n}, \dots, f_0, f_1, \dots, f_n, \dots).$$

On appelle *Transformée en  $Z$*  (TZ) la fonction suivante de  $Z$  :

$$TZ(\vec{f}) = F(Z) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n Z^n,$$

de sorte que  $TZ(\vec{f})$  est la TFD de  $f_n$ , et que c'est donc une écriture discrète de  $TF(f)$ .

Puisque la convolution est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t') dt' \simeq T_e \sum_n f(nT_e)g(t-nT_e),$$

l'écriture discrète de la convolution est immédiate :

$$(\vec{f} * \vec{g})_k = (f * g)(kT_e) = T_e \sum_n f_n g_{k-n}.$$

Ces définitions permettent de trouver les équivalentes discrètes des relations intégrales :

$$TZ(\vec{f} * \vec{g}) = T_e^2 \sum_n \sum_k f_n g_{k-n} Z^k \quad (4.2)$$

$$= T_e^2 \sum_n f_n Z^n \sum_k g_{k-n} Z^{k-n} \quad (4.3)$$

$$= T_e \sum_n f_n Z^n T_e \sum_{k'} g_{k'} Z^{k'} \quad (4.4)$$

$$= TZ(\vec{f}) TZ(\vec{g}). \quad (4.5)$$

Exemples d'applications :

1) Soit la fonction translatée  $g(t) = f(t - T_e)$ , sa TF s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu T_e} \hat{f}(\nu).$$

En notation discrète  $g_n = f_{n-1}$  et :

$$TZ(\vec{g}) = Z TZ(\vec{f})$$

car  $TZ(\vec{g}) = T_e \sum_n g_n Z^n = T_e \sum_n f_{n-1} Z^n = Z T_e \sum_{n'} f_{n'} Z^{n'}$ .

2) Les signaux nuls avant le temps origine sont dits *causaux* et sont notés entre crochets :

$$[f_0, f_1, \dots, f_n, \dots] = (\dots, 0, 0, 0, f_0, f_1, \dots, f_n, \dots).$$

Les TZ sont parfois immédiates :

$$TZ([1, 1, 1, \dots]) = \sum_{n \geq 0} Z^n = \frac{1}{1-Z}$$

$$TZ([0, 1, 1, \dots]) = \sum_{n \geq 1} Z^n = \frac{Z}{1-Z}$$

$$TZ([1, \alpha, \dots, \alpha^n, \dots]) = \sum_n (\alpha Z)^n = \frac{1}{1-\alpha Z}, \quad |\alpha| < 1.$$

3) L'élément neutre  $\vec{i}$  pour la convolution est défini par :

$$(\vec{g} * \vec{i})_k = g_k = T_e \sum_n g_n i_{k-n}.$$

Comme c'est vrai pour tout  $\vec{g}$ , le cas particulier  $\vec{g} = [1, 0, 0, \dots]$  montre (la réciproque étant triviale) que :

$$\vec{i} = \frac{1}{T_e} [1, 0, 0, \dots].$$

## 4.2 Filtrage linéaire

On a déjà remarqué que la sortie de nombreux systèmes physiques peut être considérée comme la convolution d'un signal d'entrée par la réponse impulsionnelle du système :

$$s = f * e,$$

relation qui s'écrit dans le domaine des fréquences :

$$\hat{s} = \hat{f} \hat{e},$$

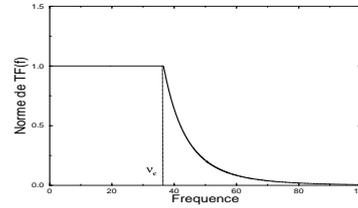
et en écriture discrète :

$$S(Z) = F(Z)E(Z).$$

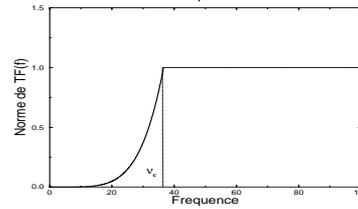
La fonction  $f$  est appelée *filtre* (linéaire), et la convolution par  $f$  *filtrage*. Filtrer revient à multiplier par une fonction de transfert dans le domaine spectrale, c'est-à-dire à amplifier certaines fréquences par rapport à d'autres. Ce qui correspond bien à la définition naturelle du filtre. Suivant le type de filtre

on parlera de (ci dessous on représente des exemples de fonctions  $|\hat{f}(\nu)|$ ) :

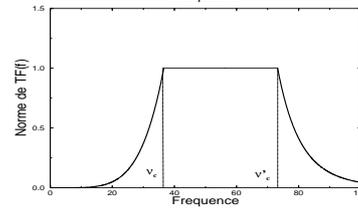
- filtre passe-bas :



- filtre passe-haut :



- filtre passe-bande :



Exemple : soit la moyenne glissante :

$$s_n = e_n + e_{n-1} + e_{n-2} + e_{n-3} + e_{n-4} + e_{n-5}. \quad (4.6)$$

La TZ de cette relation s'écrit :

$$S(Z) = e(Z) + ZE(Z) + Z^2E(Z) + Z^3E(Z) + Z^4E(Z) + Z^5E(Z),$$

c'est-à-dire :

$$S(Z) = F(Z)E(Z) = (1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5)E(Z) = \frac{1 - Z^6}{1 - Z}E(Z).$$

Une astuce consiste à réécrire cette relation :

$$S(Z) = ZS(Z) + (1 - Z^6)E(Z),$$

c'est-à-dire :

$$s_n = s_{n-1} + e_n - e_{n-6}.$$

Cette relation est évidemment plus avantageuse numériquement que le processus (4.6). Plus généralement on appelle *filtre récursif* un filtre du type :

$$F(Z) = \frac{A(Z)}{B(Z)} = \frac{\sum_{k=0}^K a_k Z^k}{\sum_{k=0}^{K'} b_k Z^k}.$$

En effet la relation  $S(Z) = F(Z)E(Z)$  peut s'écrire dans ce cas :

$$b_0 S(Z) = E(Z) \sum_{k=0}^K a_k Z^k - Z S(Z) \sum_{k=0}^{K'-1} b_{k+1} Z^k,$$

c'est-à-dire :

$$s_n = \frac{1}{b_0} \left( \sum_{k=0}^K a_k e_{n-k} - \sum_{k=0}^{K'-1} b_{k+1} s_{n-k-1} \right),$$

relation qui a l'intérêt d'être linéaire. L'utilisation des TZ permet ainsi l'étude des filtres, de leurs propriétés, de leurs pôles ...

### 4.3 L'intercorrélation

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$ , on définit l'intercorrélation, si elle existe, par :

$$r_{fg}(t) = \int \bar{f}(t') g(t+t') dt', \quad (4.7)$$

que l'on notera aussi  $f \bar{*} g$  puisque :

$$f \bar{*} g(t) = r_{fg}(t) = (\bar{f}(-t') * g(t'))(t).$$

L'écriture discrète de cette relation est :

$$\vec{f} \bar{*} \vec{g}_k = T_e \sum_n \bar{f}_n g_{n+k}.$$

Il s'agit donc du produit scalaire des deux vecteurs formés des  $f(t_n)$  et des  $g(t_k + t_n)$ , qui est d'autant plus grand que les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire que  $f(t)$  est proche de  $cste \times g(t+t')$ . L'intercorrélation caractérise donc la ressemblance entre deux fonctions. Par exemple, l'intercorrélation de deux sinusoides est maximale lorsqu'elles sont en phase.

L'autocorrélation est définie comme l'intercorrélation de la fonction par elle-même :

$$r_f = f \bar{*} f.$$

Une propriété importante est la TF de l'intercorrélation :

$$TF(f \bar{*} g) = TF(\bar{f}(-t')) TF(g(t')) = \overline{TF(f)} TF(g).$$

Pour l'autocorrélation cela implique :

$$TF(r_f) = |TF(f)|^2,$$

c'est-à-dire que la TF de l'autocorrélation est un réel positif et qu'il s'agit du spectre de puissance. Cette définition de l'autocorrélation s'applique si l'énergie du signal :

$$E = \int |f(t)|^2 dt$$

est finie. Une alternative est utilisée pour la classe des signaux à puissance :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

finie. On définit alors l'autocorrélation par :

$$\Gamma_{ff}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{f}(t') f(t+t') dt'. \quad (4.8)$$

Une seconde propriété intéressante est que l'autocorrélation d'une fonction périodique est également périodique.

Exemple d'utilisation : en sismique, le *vibroscis* est une source vibrante qui envoie dans le sol une vibration appelée *sweep*, de la forme :

$$e(t) = \cos(2\pi\nu(t)t) \quad \text{si } 0 < t < T, \quad \text{avec } \nu(t) = a + bt,$$

c'est-à-dire une sinusoïde donc la fréquence augmente linéairement avec le temps<sup>1</sup>. Or il se trouve que l'autocorrélation du sweep a l'allure d'un sinus cardinal. Le sweep «idéal» aurait donc un dirac comme autocorrélation. Cette propriété implique que l'intercorrélacion du signal de sortie (mesuré) et du signal d'entrée (parfaitement connu) est :

$$s \bar{*} e = i * e \bar{*} e = i * r_e \simeq i,$$

la réponse impulsionnelle du sous-sol. Cette quantité caractérise uniquement le sous-sol. Dans le cas de la sismique réflexion avec des couches homogènes cette réponse impulsionnelle est une somme de diracs. L'intercorrélacion est alors une méthode rapide pour positionner les interfaces et l'on voit que l'on reconstitue d'autant mieux la suite de diracs que l'autocorrélation du signal d'entrée est un dirac.

## 4.4 Signaux aléatoires

Un signal ( $s$ ) est souvent composée d'une partie «certaine» ( $f$ ), celle qui nous intéresse en général, appelée ainsi car non soumise au hasard, et d'une partie aléatoire ( $b$ ) considérée en général comme du bruit :

$$s(t) = f(t) + b(t). \quad (4.9)$$

Un des problèmes se posant alors est de faire la part du bruit et du signal, ou tout du moins de dégager leurs principales caractéristiques respectives.

<sup>1</sup>C'est un exemple de signal à modulation de fréquence

Dans cette optique, à chaque instant  $t$ , le bruit enregistré  $b(t)$  est considéré comme une réalisation d'une variable aléatoire  $B(t)$ . Ce bruit possède alors une loi, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $p$  donnant la probabilité que  $B$  soit au voisinage d'une réalisation  $b$  :

$$P(b < B \leq b + db) = p(b) db.$$

A la limite, pour une infinité de réalisations  $b_n$ , on définit la moyenne statistique (espérance) :

$$\mu'_b(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N b_n(t),$$

et l'autocorrélation statistique (lié à la covariance) :

$$\Gamma'_b(t, t + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N b_n(t) b_n(t + \tau).$$

On suppose souvent que le bruit est *stationnaire au sens strict*, c'est-à-dire que toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps. Dans ce cas on peut montrer que  $\Gamma'_b(t, t + \tau)$  est indépendant de  $t$  :

$$\Gamma'_b(t, t + \tau) = \Gamma'_b(\tau).$$

Une deuxième classe de signaux importante est celle des signaux ergodiques. Ce sont ceux pour lesquelles les moyennes temporelles :

$$\mu_b = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b(t) dt,$$

$$\Gamma_b(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b(t) b(t + \tau) dt$$

sont des nombres (presque sûrement) certains. Les signaux stationnaires et ergodiques possèdent la propriété importante : leurs moyennes statistiques et temporelles sont égales, c'est-à-dire :

$$\mu'_b(t) = \mu_b(t),$$

$$\Gamma'_b(t, t + \tau) = \Gamma_b(\tau).$$

Par suite, les moyennes statistiques de telles signaux peuvent être connus par leurs moyennes temporelles sur une seule réalisation. Même si tous les bruits ne sont pas rigoureusement stationnaires et ergodiques, cette propriété est fort utile puisqu'elle évite, entre autres, de répéter une expérience un grand nombre de fois pour connaître les propriétés du bruit. D'autre part, puisque dans la pratique il est le plus souvent impossible de connaître directement la

loi de  $B$ , les bruits sont caractérisés par leurs moyennes. Le spectre d'énergie du bruit est une façon équivalente de caractériser l'autocorrélation puisque :

$$|TF(b)|^2 = TF(\Gamma_b).$$

On appelle bruits «en  $1/f$ » les bruits qui décroissent en puissance de la fréquence :

$$|TF(b)|^2(\nu) \simeq \frac{1}{\nu^\beta}.$$

- si les valeurs successives du bruit sont décorréelées, c'est-à-dire si  $\Gamma_b(\tau) = \text{cste} \delta(\tau)$ , alors  $|TF(b)|^2 = \text{cste}$  et on appelle cela un *bruit blanc*.
- les bruits tels que  $\beta \neq 0$  sont appelés *bruits colorés*,
- si  $\beta = 1$  on parle par exemple de *bruit rose*...

Exemple : soit un signal constitué d'une partie certaine et d'un bruit :

$$s(t) = f(t) + b(t).$$

Effectuons :

$$\Gamma_{ss} = \Gamma_{ff} + \Gamma_{bf} + \Gamma_{fb} + \Gamma_{bb}.$$

Intuitivement, si le bruit est à moyenne nulle, on peut comprendre que  $\Gamma_{bf}$  et  $\Gamma_{fb}$  tendent vers 0 quand  $T$  tend vers l'infini puisque il s'agit de sommes de nombres aléatoires de moyennes nulles multipliés par des nombres certains. D'autre part, si  $b$  est un bruit blanc,  $\Gamma_{bb}$  tend vers un dirac. Ailleurs qu'en  $t = 0$  il vient donc à la limite :

$$\Gamma_{ss} \simeq \Gamma_{ff}.$$

c'est-à-dire que l'autocorrélation du signal total est quasiment celui du signal certain. Et puisque les périodes de  $\Gamma_{ff}$  sont les mêmes que celles de  $f$  on y a gagné à enlever le bruit. Plus précisément, si :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n\nu_0 t) + b_n \sin(2\pi n\nu_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n\nu_0 t + \varphi_n), \end{aligned}$$

alors :

$$\Gamma_{ff}(t) = \frac{a_0^4}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos(2\pi n\nu_0 t).$$

La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique a donc même période fondamentale que le signal et contient toutes les fréquences de ce signal et

celles-ci seulement. Cette fonction conserve l'amplitude en fréquence mais pas la phase.

Une façon de diminuer l'amplitude relative du bruit par rapport au signal est de disposer de plusieurs ( $N$ ) réalisations  $b_n(t)$  de la mesure et de faire la sommation<sup>2</sup> :

$$\bar{b}_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b_n(t).$$

Si  $b$  possède un écart-type  $\sigma$  le théorème central-limite nous indique que  $\bar{b}_N(t)$  tend vers une variable aléatoire gaussienne d'écart-type  $\sigma/\sqrt{N}$ . De la sorte, la moyenne :

$$\bar{s}_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n(t) = f(t) + \bar{b}_N(t)$$

est la somme de  $f$  et d'un bruit dont l'amplitude est diminuée de  $\sqrt{N}$  par rapport à une mesure unique. C'est la fameuse «loi» de réduction du bruit en  $1/\sqrt{N}$ .

## 4.5 La transformée de Hilbert

Il existe des transformées utiles autres que la TF. Par exemple la transformée de Hilbert dont la définition donnée usuellement est :

$$TH(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = \frac{1}{\pi t} * f(t). \quad (4.10)$$

En fait, cette intégrale n'étant pas toujours convergente, il faut comprendre la définition comme une valeur principale :

$$\begin{aligned} TH(f)(t) &= \text{v.p.} \left( \frac{1}{\pi t} \right) * f = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t'} (f(t-t') - f(t+t')) dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_t^{+\infty} \frac{f(t') - f(2t-t')}{t-t'} dt'. \end{aligned} \quad (4.11)$$

De la TF de la valeur principale, on déduit :

$$TF(TH(f))(\nu) = -i \operatorname{sgn} TF(f)(\nu),$$

si bien qu'après un calcul simple :

$$i TH(f)(t) = \int_0^{+\infty} (TF(f)(\nu) - TF(f)(-\nu)) e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

<sup>2</sup>On fait souvent un anglicisme et on dit *stacking*.

Si on note  $f_a = f + iT H(f)$ , on obtient alors :

$$f_a(t) = 2TF^{-1}(TF(f) H) = 2 \int_0^{+\infty} TF(f)(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu,$$

$H$  étant le Heaviside. On appelle  $f_a$  le *signal analytique*, et son module *l'enveloppe* car il représente l'enveloppe du signal.

## 4.6 Analyse temps-fréquence

(d'après Gibert, 1996)

La TF a le désavantage de ne plus faire apparaître les caractéristiques temporelles du signal. Impossible avec la TF de savoir, par exemple, si une fréquence donnée du spectre est présente dans tout le signal ou à certains moments donnés, et quels sont ces moments. Pour les signaux dont les caractéristiques spectrales varient avec le temps il peut être utile d'utiliser une représentation à la fois en temps et en fréquence.

Cela est théoriquement impossible puisque représentations temporelle et fréquentielle sont indépendantes au sens où il faut connaître l'une de  $-\infty$  à  $+\infty$  pour connaître l'autre. On peut cependant faire un compromis entre temps et fréquence en renonçant à la bijectivité de la transformation c'est-à-dire en acceptant la redondance d'information dans la représentation temps-fréquence.

La façon la plus élémentaire pour le faire est d'analyser le signal par tronçons en faisant «glisser» une fenêtre de longueur  $L$  centrée en  $t$  et de faire la TF de la fonction tronquée :

$$F(\nu, t) = \int_{t-L/2}^{t+L/2} f(t') e^{-2i\pi\nu(t'-t)} dt'. \quad (4.12)$$

Cette relation s'écrit plus généralement :

$$F(\nu, t) = f(t) * g(\nu, t). \quad (4.13)$$

La relation 4.12 utilise une fenêtre porte ( $g(\nu, t) = 1_{[-L/2, L/2]} e^{-2i\pi\nu t}$ ) mais il est plus judicieux de choisir une fonction qui possède une TF sans lobes secondaires. Gabor avait préconisé une gaussienne :

$$g(\nu, t) = \exp\left(-\frac{\pi t^2}{L^2}\right) e^{-2i\pi\nu t}.$$

On peut raffiner le processus en adaptant la taille de la fenêtre à la période. On peut la prendre par exemple proportionnelle à la période  $a$  :

$$L = \alpha a = \frac{\alpha}{\nu}.$$

$g$  devient alors une fonction de  $t/a$  et l'on pose :

$$m_\alpha \left( \frac{t}{a} \right) = g(a, t) = \exp \left( -\frac{\pi}{\alpha^2} \left( \frac{t}{a} \right)^2 \right) e^{-2i\pi t/a}. \quad (4.14)$$

Cette fonction est appelée ondelette de Morlet, et l'on nomme transformée en ondelettes de Morlet :

$$W_m f(a, t) = \frac{1}{a} m_\alpha \left( \frac{t}{a} \right) * f(t).$$

Le paramètre  $a$  est un facteur d'échelle, choisi d'autant plus petit que l'on analyse les détails les plus fins. En généralisant encore un peu, on définit la transformée de  $f$  en ondelettes continue par :

$$W_\psi f(a, t) = \frac{1}{a} \psi \left( \frac{t}{a} \right) * f(t),$$

où  $a > 0$  est un facteur d'échelle et l'ondelette analysante  $\psi$  vérifie :

$$\int_0^{+\infty} |TF(\psi)(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} < \infty.$$

L'étude de cet outil dépasse le cadre de ce cours et de mes connaissances.

Montrons pour terminer un exemple d'utilisation de la TF par fenêtre glissante. Pour boucler la boucle, revenons à notre signal fétiche et appliquons-lui la fonction `specgram` de MATLAB qui calcule la FFT par fenêtre de temps. Le résultat, en figure 4.1, représente l'amplitude<sup>3</sup> de la TF en fonction du temps et de la fréquence. On distingue toujours nettement les pics hebdomadaires (7 jours et harmoniques). Cette représentation permet de plus de distinguer une augmentation des pics hebdomadaires au cours du temps. Cela traduit une réalité sociologique : l'augmentation de la médicalisation des accouchements. Une TF glissante avec une fenêtre de taille appropriée montrerait une diminution du pic annuel avec le temps. Cela marque-t-il la moindre influence des saisons sur le monde moderne ?

---

<sup>3</sup>On a représenté en fait  $(\log(FFT))^2$  sur la troisième composante afin de mieux faire apparaître l'évolution temporelle.

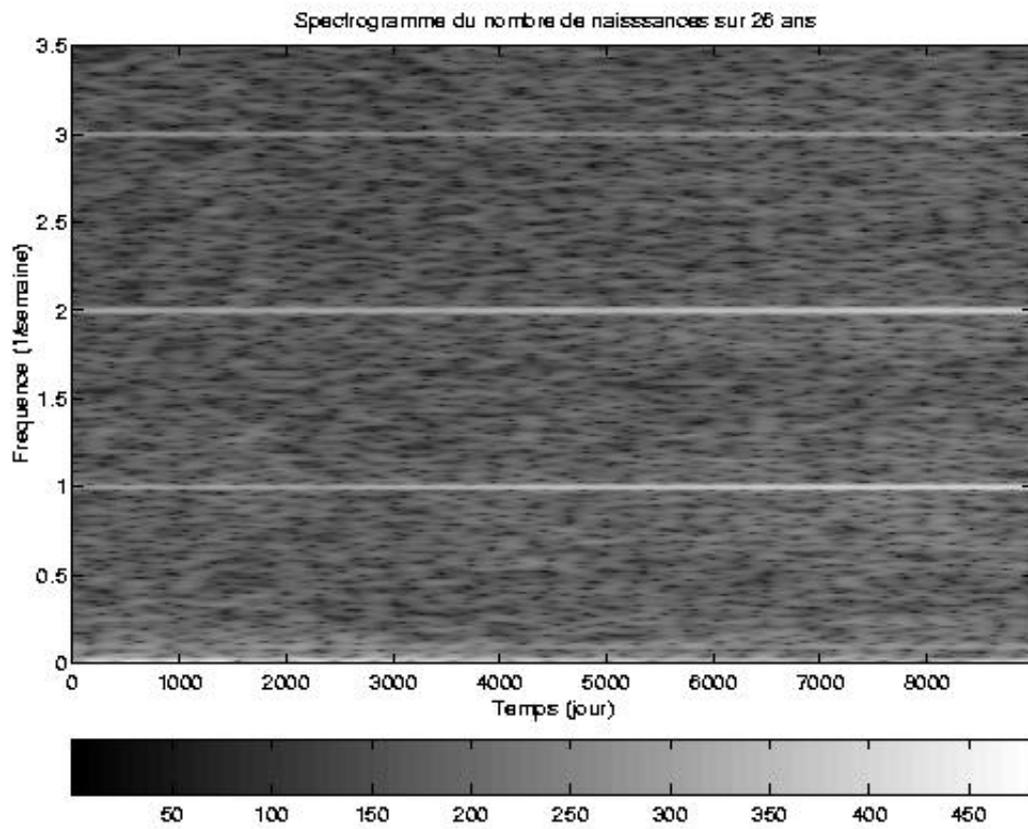


FIG. 4.1 – Amplitude de la *FFT* du nombre de naissances en fonction du temps (en jour) et de la fréquence en ( $1/\text{semaine}$ ).