Traitement du signal
Examen du mercredi 7 avril 1999

Magistère des sciences de la Terre, 2ème année, ENS-Lyon.

Examen avec documents de cours. 2 pages. Durée conseillée : 1h30.

— o —

On notera δ ou $\delta(t)$ la distribution de Dirac, H celle de Heaviside, S' la dérivée d'une distribution S.

Distributions

1. Montrer que pour une fonction $x(t)$ infiniment dérivable, $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$.

2. En déduire les dérivées première et seconde de la distribution :

$$S(t) = \frac{1}{\omega} H(t)\sin(\omega t). \tag{1}$$

3. En déduire que S vérifie : $(\delta'' + \omega^2\delta) * S = \delta$.

4. En déduire la solution (si les produits de convolution existent) de l'équation différentielle : $X'' + \omega^2 X = B$, où B est une distribution.

Transformée de Fourier

Soit S la distribution (qui est aussi une fonction) de l'exercice précédent. On pourra noter $\omega = 2\pi\nu_0$.

5. Représenter cette fonction. Dire qualitativement (et physiquement) pourquoi la solution de l'oscillateur libre harmonique (c'est par exemple le mouvement libre d'un pendule) prend cette forme.

6. Calculer sa transformée de Fourier (en s'aidant du cours).

7. On effectue une analyse temps-fréquence de S en faisant «glisser» une fenêtre de longueur L centrée en t puis en faisant la TF de la fonction tronquée (formule 4.12, p. 68 du cours). Une partie du spectrogramme (temps-fréquence-amplitude) résultant est représenté en figure 1 ($t = 0$ correspond à la valeur $Temps = 5000$ de la figure). En vous aidant de la forme de la TF d'une porte, expliquer la figure obtenue. Que vaut ν_0 ?

8. Suite aux réponses précédentes, que répondriez-vous à l'affirmation : « Un tremblement de Terre émet toute une gamme continue de fréquences, pourtant la Terre se met alors à vibrer à certaines fréquences particulières, indépendantes des fréquences du séisme? ». Commentez.

Analyse temps-fréquence

On considère les fonctions :

$$f_1(t) = \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 20t), \tag{2}$$

$$f_2(t) = \sin(2\pi 10t) \quad \text{si} \quad t \leq 0,$$

$$= \sin(2\pi 20t) \quad \text{si} \quad t > 0, \tag{3}$$

$$f_3(t) = \sin(2\pi\nu(t)t) \quad \text{avec :} \tag{4}$$

$$\nu(t) = 10 + 10t \quad \text{si} \quad t \in [0, 1], \quad \nu = 0 \quad \text{ailleurs.} \tag{5}$$

9. Représenter (en expliquant qualitativement) les spectres d'amplitude et les spectrogrammes de ces fonctions. Quel est l'intérêt de l'analyse temps-fréquence ?

10. Quelle précaution doit-on prendre si on échantillonne de tels signaux ?

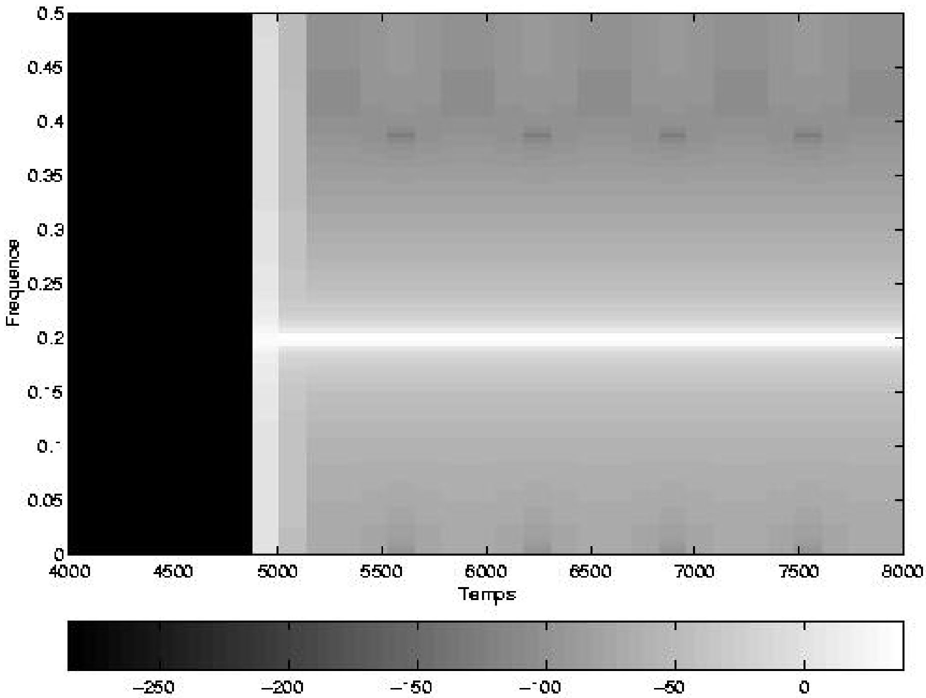

Fig. 1 - *Amplitude (en échelle logarithmique) de la FFT de S en fonction du temps et de la fréquence (en hertz).*

— Fin —

Texte disponible à `http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`