Traitement du signal M15

Examen du mardi 31 mars 1998

Magistère des sciences de la Terre, Deuxième année, ENS Lyon.

Examen avec documents. Durée approximative : 1h30.

Les parties sont indépendantes. 4 pages

I. Distributions

On veut montrer que l'on peut dériver, au sens des distributions, une fonction discontinue et qu'il apparait alors un Dirac.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que h a une dérivée première h' continue sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$, h et h' ont au point a une limite à gauche et une limite à droite finies. Soient $[h]$ et $[h']$ les distributions régulières définies par les fonctions $h, h' \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$[h]' = [h'] + (h(a^+) - h(a^-))\delta_a \tag{1}$$

où $h(a^+)$ et $h(a^-)$ sont les limites à droite et à gauche de h au point a.

II. Convolution et TF [1]

Soit $\widehat{f}$ la TF de f. Démontrer (au sens des fonctions) :

$\{f(t) * \exp(2i\pi\nu t)\}(t') = \widehat{f}(\nu)\exp(2i\pi\nu t')$.

Soit $f = f_1 * f_2$. Déduire de la relation précédente que :

$\widehat{f} = \widehat{f}_2\,\widehat{f}_1$.

III. Signal numérique

Un signal analogique est échantillonné à la fréquence de 1500 Hertz.

a) Quelle précaution doit-on avoir prise avant échantillonnage ?

b) Dans ce cas quelle est la largeur du spectre du signal ?

c) On calcule la TF de ce signal numérique par une FFT sur 1024 points. Quelle est la longueur du signal ? Quelle est la distance, en Hertz, entre deux raies du spectre ?

d) A quel(s) phénomène(s) a-t-on fait allusion dans cet exercice ?

IV. Calcul numérique [2]

Nous allons utiliser (virtuellement) MATLAB pour faire une TF d'un signal réel numérique. L'aide MATLAB de la FFT est donnée en fin d'énnoncé.

[1] Inspiré d'un examen donné à l'IPG-Strasbourg en 96-97

[2] idem

1.a) Indiquer rapidement quel principe est utilisé pour faire cette TF.

1.b) Pour faire un test, on fait la TF d'un signal échantillonné au pas de 1 s pour lequel on dispose de cinq valeurs. Pour cela on exécute les ordres MATLAB :

```
x=[4;3;7;-9;1;0;0;0]
y=fft(x)
```

Pourquoi met-on 0 pour les trois dernières valeurs ?

1.c) Les deux premières valeurs affichées sont :

```
y =
   6.0000
  11.4853 - 2.7574i
```

Combien de valeurs seront affichées en tout ? Quel est le pas en fréquence ? Vérifier la première valeur. Que représente elle ?

2. Nous allons maintenant traiter un exemple simple. Il s'agit d'un signal composé de deux sinusoïdes échantillonnées à 1000 Hz. Pour cela on exécute :

```
t=0:0.001:0.6;
x=2*cos(2*pi*50*t)+cos(2*pi*120*t);
y=fft(x);
spy=y.*conj(y)/(600*600);
plot(spy)
```

(« `conj(y)` » est le conjugué de `y`.)

2.a) `y` est-il réel ou complexe ? Justifier.

2.b) Quelle est la longueur du signal utilisé ? Quel est le pas en fréquence ?

2.c) Que représente `spy` et pourquoi divise-t-on par 600*600 ?

2.d) La figure 1 représente `spy`. Commentez-la.

2.e) La figure 2 a été obtenue avec la commande :

```
plot(f,spy(1:300))
```

Quelles sont les valeurs de `f` portées en abscisse ? Mettre les unités sur les axes. Écrire en MATLAB la(les) ligne(s) qui précéde(nt) cette instruction et qui a(ont) servi à construire `f`. Pourquoi dessine-t-on `spy` pour des indices de 1 à 300 ? Pourquoi `f` s'arrête-il à 500 ?

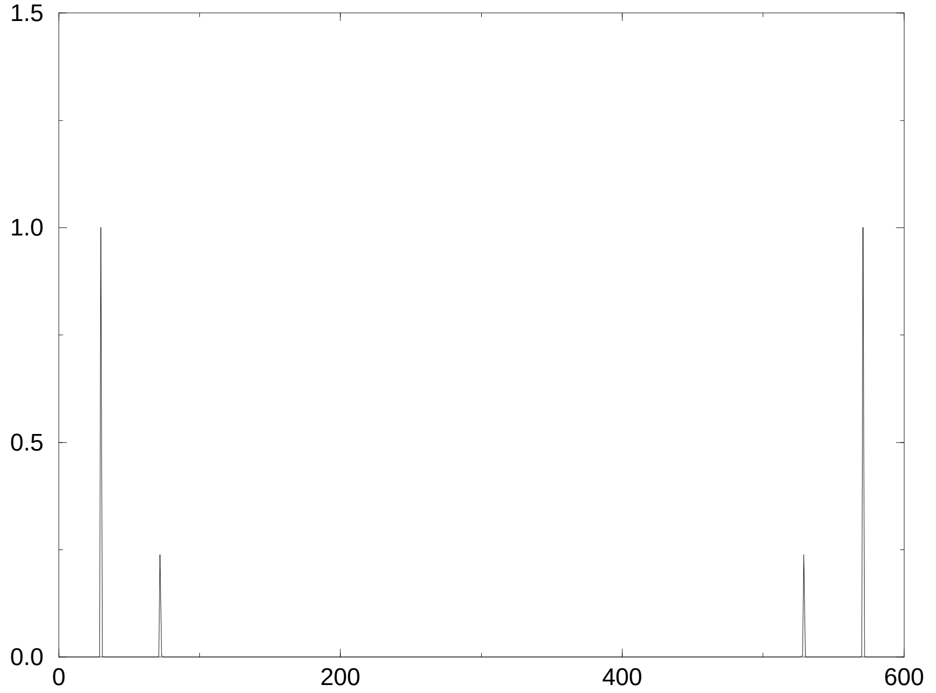

FIG. 1 – *Dessin de* spy.

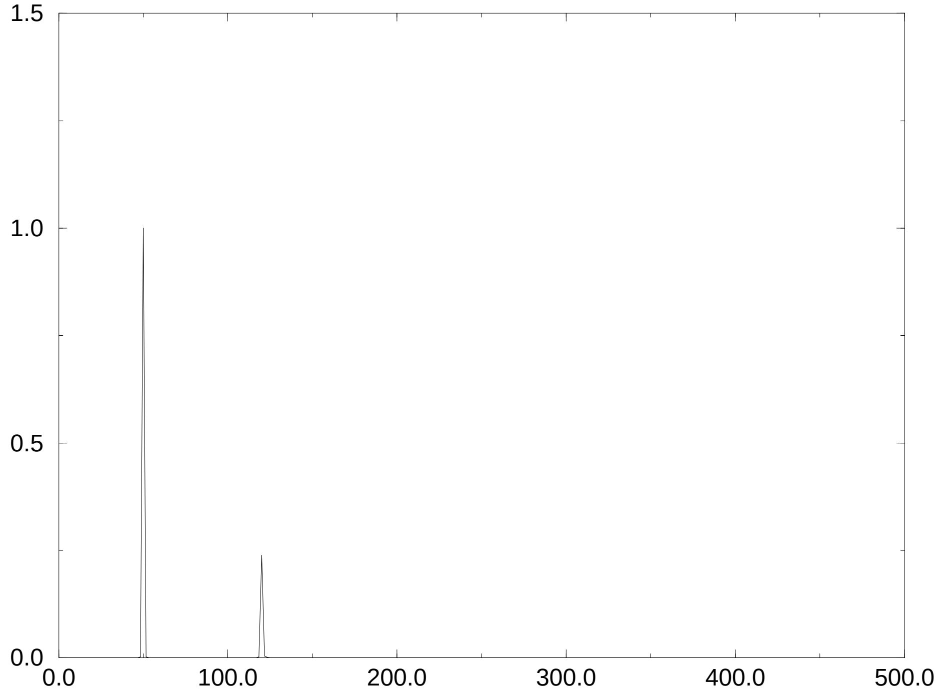

FIG. 2 – *Dessin de* spy.

Annexe : aide MATLAB de fft

```
>> help fft

 FFT Discrete Fourier transform.
    FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  If the
    length of X is a power of two, a fast radix-2 fast-Fourier transform
    algorithm is used.  If the length of X is not a power of two, a slower
    non-power-of-two algorithm is employed. For matrices, the FFT operation
    is applied to each column. For N-D arrays, the FFT operation operates
    on the first non-singleton dimension.

    FFT(X,N) is the N-point FFT, padded with zeros if X has less
    than N points and truncated if it has more.

    FFT(X,[],DIM) or FFT(X,N,DIM) applies the FFT operation across the
    dimension DIM.

    For length N input vector x, the DFT is a length N vector X, with elements
                     N
       X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                    n=1
    The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                     N
       x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                    k=1

    The relationship between the DFT and the Fourier coefficients a and b in
                N/2
    x(n) = a0 + sum a(k)*cos(2*pi*k*t(n)/(N*dt))+b(k)*sin(2*pi*k*t(n)/(N*dt))
                k=1
    is
       a0 = 2*X(1)/N, a(k) = 2*real(X(k+1))/N, b(k) = 2*imag(X(k+1))/N,
    where x is a length N discrete signal sampled at times t with spacing dt.
```

——— Fin ———

Texte disponible à http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html