Examen 2023 - Traitement du signal - 1 h 30

M1 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Frédéric Chambat

— o —

1. Calcul analytique de TF

Nous allons calculer[1] la TF que nous n'avions pas eu le temps de faire en TD, celle du peigne de Dirac. Celui-ci est défini par

$$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n). \tag{1}$$

a. Montrer que le peigne de Dirac est périodique de période 1.

b. Rappeler le théorème du développement en série de Fourier (sous forme complexe) d'une fonction périodique. On donnera l'expression des coefficients du développement comme une intégrale sur un intervalle centré en 0. Ecrire ce développement et les coefficients pour le peigne de Dirac (pour l'instant, on ne demande pas de les calculer).

c. Donner une définition du dirac $\delta(t)$, puis de $\delta(t-n)$.

d. Calculer les intégrales donnant les coefficients de la série de Fourier du peigne de Dirac (vous devriez trouver qu'ils sont égaux entre eux).

e. Rappeler le principe de la démonstration de $\mathrm{TF}(1) = \delta$.

f. Rappeler la TF de $e^{2i\pi\nu_0 t}$ ou, si vous avez oublié, retrouver-la à partir de la question précédente.

g. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{TF}(Ш) = Ш$.

2. Calcul numérique en Python. Modes propres de la Terre

On donne dans le fichier `gravi_modes1.dat`[2] l'enregistrement de la pesanteur à un gravimètre d'observatoire au cours du temps après le séisme de Sumbawa (1977, Indonésie) de magnitude 8,3.

a. Visualiser la pesanteur en fonction du temps. Commentaire.

---

1. Par un calcul de physicien, mais la preuve mathématique plus rigoureuse, basée sur la théorie des distributions, repose sur les mêmes principes.
2. http ://frederic.chambat.free.fr/ens/signal/gravi_modes1.dat

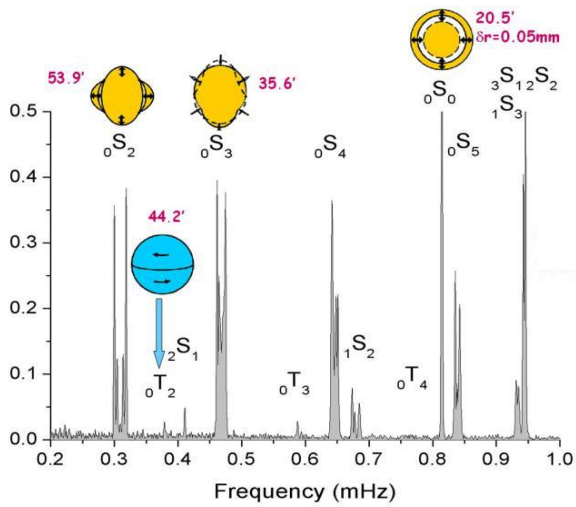

FIGURE 1 – Description de quelques modes propres de vibration de la Terre.

b. Faites une TF du signal et visualiser le spectre d'amplitude en fonction de la fréquence.

c. Visualiser le spectre d'amplitude en fonction de la période en minutes. Faire un zoom entre 0 et 60 min.

d. On donne en figure 1 les modes propres terrestres les plus graves (= basses fréquences). Comparer ce que vous avez trouvé à cette figure.

3. Clustering

Soit N points dans un espace à M dimensions. La matrice X de taille $N \times M$ représente ce jeu de données, où X_{ij} represente la j^e coordonnée du i^e point. Écrire un pseudo-code pour faire un clustering par kmeans sur k familles. Note Wikipedia : En programmation, le pseudo-code est une façon de décrire un algorithme en langage presque naturel, sans référence à un langage de programmation en particulier. Exemple de pseudo-code :

```
For i = 1 until Number_Of students
        If student's grade is greater than or equal to 10
            Print "Bien joué!"
        else
                   Print "Perdu!"
ENDFOR
```

Exam 2023 - Signal processing - 1 h 30

M1 Earth Sciences, ENS Lyon.

Frédéric Chambat

— o —

1. Analytical calculation of TF

We are going to calculate[3] the TF which we did not have time to do in TD, that of the Dirac comb. This is defined by

$$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n). \tag{2}$$

a. Show that the Dirac comb is periodic with period 1.

b. Recall the Fourier series theorem (in complex form) for a periodic function. Express the coefficients of the expansion as an integral over an interval centered at 0. Write down this development and the coefficients for the Dirac comb (for the time being, we don't ask you to calculate them).

c. Give a definition of the Dirac $\delta(t)$, then of $\delta(t-n)$.

d. Calculate the integrals giving the coefficients of the Fourier series of the Dirac comb.

e. Calculate the integrals giving the coefficients of the Fourier series of the Dirac comb (you should find that they are equal to each other).

f. Recall the principle of the proof of $TF(1) = \delta$.

g. Recall the TF of $e^{2i\pi\nu_0 t}$ or, if you have forgotten, find it again from the previous question.

h. Deduce from the previous questions that TF(Ш) = Ш.

2. Numerical calculation in Python. Eigenmodes of the Earth

The file `gravi_modes1.dat`[4] shows the recording of gravity at an observatory gravimeter over time after the Sumbawa earthquake (1977, Indonesia) of magnitude 8.3.

3. By a physicist's calculation, but the more rigorous mathematical proof, based on the theory of distributions, rests on the same principles.

4. http ://frederic.chambat.free.fr/ens/signal/gravi_modes1.dat

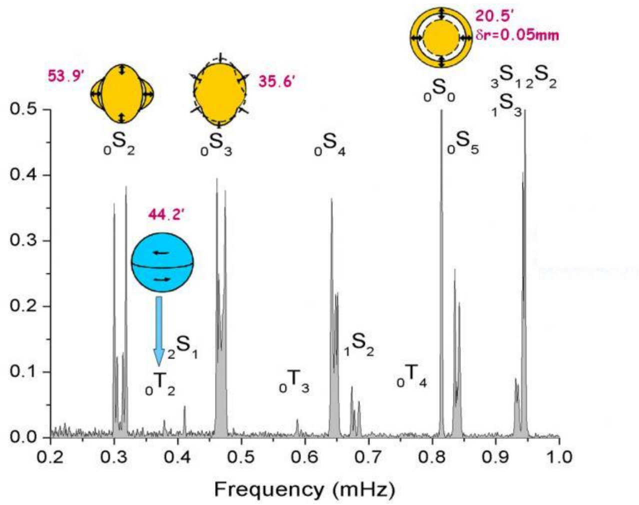

FIGURE 1 – Description of some of the Earth's natural modes of vibration.

a. Visualise gravity as a function of time. Comment.

b. Make a TF of the signal and display the amplitude spectrum as a function of frequency.

c. Display the amplitude spectrum as a function of period. Zoom in between 0 and 60 min. Compare with the eigenmodes described in figure 1.

3. Clustering

Let N be points in an M-dimensional space. The matrix X of size $N \times M$ represents this data set, where X_{ij} represents the jth coordinate of the ith point. Write a pseudocode for kmeans clustering on k families. Wikipedia note : In programming, pseudocode is a way of describing an algorithm in an almost natural language, without reference to a particular programming language. Example of pseudocode :

```
For i = 1 until Number_Of students
        If student's grade is greater than or equal to 10
            Print "Well done!"
        else
                   Print "Lost!"
ENDFOR
```