Traitement du signal

Examen de mai 2005

Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.

Documents autorisés : cours. Durée : 3 h.

— o —

I. Signal numérique

Un signal analogique est échantillonné à la fréquence de 1500 Hertz.

a) Quelle précaution doit-on avoir prise avant échantillonnage ?

b) Dans ce cas quelle est la largeur du spectre du signal ?

c) On calcule la TF de ce signal numérique par une FFT sur 1024 points. Quelle est la longueur du signal ? Quelle est la distance, en Hertz, entre deux raies du spectre ?

d) A quel(s) phénomène(s) a-t-on fait allusion dans cet exercice ?

II. Transformée de Fourier

Soit la fonction

$$f(t) = \cos(2\pi\nu_1 t)\cos(2\pi\nu_2 t)p(t),$$

avec $p(t)$ la porte telle que $p = 1$ sur $[-T/2, T/2]$ et 0 ailleurs.

a) Exprimer le produit des cosinus comme une somme de cosinus.

b) Calculer la TF de f.

c) Représenter f dans le cas $\frac{1}{T} < \nu_1 \ll \nu 2$.

d) Représenter la TF de f.

e) Quelles conditions doivent être réalisées sur T, ν_1, $\nu 2$ et la fréquence d'échantillonnage pour que ces sinusoïdes soient détectables par TF d'un signal mesuré ?

III. Distributions

Soit S la distribution régulière définie par la fonction

$S(t) = 0$ pour $t < 0$,

$S(t) = at^2$ pour $t \geq 0$.

Calculer au sens des distributions les dérivées première, seconde, et troisième de S.

IV. Transformée de Fourier et distributions

a) Représenter la fonction

$$H_\epsilon(t) = \exp(-\epsilon t) H(t)$$

où H est la fonction Heaviside.

b) Quelle est la limite de H_ϵ quand ϵ tend vers 0 ?

c) Montrer que la TF de H_ϵ est :

$$\widehat{H_\epsilon}(\nu) = \frac{1}{\epsilon + 2i\pi\nu} = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + 4\pi^2\nu^2} - i\frac{2\pi\nu}{\epsilon^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

d) Soit h_ϵ la partie réelle de $\widehat{H_\epsilon}$. Pour toute fonction test φ, calculer la limite de $\int h_\epsilon(\nu)\varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ quand ϵ tend vers 0. En déduire que h_ϵ tend alors vers un demi-dirac. Indication : on pourra poser $x = 4\pi\nu/\epsilon$ et on rappelle que la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan x$.

e) En déduire la partie réelle de la TF du Heaviside.

— o —