Traitement du signal
Examen du mercredi 11 avril 2001

Magistère de sciences de la Terre, 2ème année, ENS-Lyon.

Examen avec documents de cours. 1 page. Durée conseillée : 1h 15.

— o —

On notera δ ou $\delta(x)$ la distribution de Dirac, H celle de Heaviside. On prendra comme définition de la TF : $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$.

Distributions

Soit S une distribution sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions test infiniment dérivables à support compact. On veut montrer que les distributions S solutions de $xS = 0$ (on peut noter aussi $xS(x) = 0$) sont toutes de la forme $S = \lambda\delta$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $S = \lambda\delta$ vérifie bien $xS = 0$.

2. Montrer que S s'annule sur le sous-ensemble $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ formé des fonctions de la forme $x\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Soit ψ une fonction test nulle en 0. Pourquoi peut-on écrire $\psi(x) = \int_0^x \psi'(t)\, \mathrm{d}t$?

4. Faire le changement de variable $u = t/x$. En déduire que ψ est de la forme $x\varphi$ et que $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ est aussi le sous-espace des fonctions test qui s'annule en 0.

5. Considérer maintenant φ quelconque, et poser $\psi = \varphi - \varphi(0)\theta$ où θ est une fonction test quelconque telle que $\theta(0) = 1$. Calculer $< S, \psi >$ et conclure.

6. En utilisant la valeur principale, donner les solutions de $xS = 1$.

7. En déduire une méthode de calcul de $\hat{H}$ (rappel : $H' = \delta$).

Transformée de Fourier

1. Calculer la TF de la fonction $f(t) = e^{-\lambda t} H(t)$.

2. Quelle est la TF de $g(t) = \cos(\omega_0 t)$? En déduire celle du produit $h = fg$.

3. Représenter les fonctions f, g, h et les modules $|\hat{f}|, |\hat{g}|, |\hat{h}|$ de leurs TF. Physiquement, que peut-représenter la fonction h ?

4. Calculer la dérivée (logarithmique) de $|\hat{h}|(\omega)$.

5. Le maximum de $|\hat{h}|$ est-il en $\omega = \omega_0$?

6. Déterminer les valeurs de ω qui rendent $|\hat{h}|$ maximal ; on pourra poser $\omega = \omega_0(1+\epsilon)$, $x = \lambda^2/\omega_0^2$ et on supposera $\epsilon \ll 1$ et $x \ll 1$. Que signifient ces deux hypothèses ?

7. Commenter brièvement les résultats obtenus.

Texte disponible à `http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`