Traitement du signal M15

Corrigé de l'examen du jeudi 31 mars 1998

I. Distributions

Comme toujours il faut partir du bon bout et appliquer les définitions. Il faut juste avoir compris que h' désigne la dérivée de h sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ et pas sur $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
< [h]', \varphi > &= - < [h], \varphi' > \qquad \text{par déf. de la dérivée,}\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi' \qquad \text{par déf. de}[h],\\
&= -\int_{-\infty}^{a} h\varphi' - \int_{a}^{+\infty} h\varphi' \qquad ,\\
&= -h\varphi|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} h'\varphi - h\varphi|_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} h'\varphi \qquad \text{par intégration / parties,}\\
&= (h(a^+) - h(a^-))\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} h'\varphi \qquad \text{car } \varphi = 0 \text{ à l'infini,}\\
&= (h(a^+) - h(a^-)) < \delta_a, \varphi > + < [h'], \varphi > \qquad \text{par déf. de } \delta_a \text{ et } [h']. \text{ c.q.f.d.}
\end{aligned}
$$

II. Convolution et TF

Il suffisait d'appliquer les définitions :

$$
\begin{aligned}
\{f(t) * \exp(2i\pi\nu t)\}(t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(2i\pi\nu(t'-t))\ dt \qquad \text{par déf. de } *,\\
&= \exp(2i\pi\nu t') \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi\nu t)\ dt\\
&= \exp(2i\pi\nu t')\widehat{f}(\nu) \qquad \text{par déf. de } \widehat{f}. \text{ c.q.f.d.} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Avec $f = f_1 * f_2$ la relation (1) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\exp(2i\pi\nu t')\widehat{f}(\nu) &= \{f_1 * f_2(t) * \exp(2i\pi\nu t)\}(t')\\
&= \{f_1 * (f_2 * \exp(2i\pi\nu t))\}(t') \qquad \text{car la convolution est associative,}\\
&= \{f_1 * (\widehat{f_2}(\nu) \exp(2i\pi\nu t))\}(t') \qquad \text{par une application de (1) à } f_2,
\end{aligned}
$$

Le seul point un peu délicat se trouve ici ; il s'agit de bien voir que $\widehat{f_2}$ ne dépend que de ν et n'est pas convolué. Il joue donc le rôle d'une constante pour la convolution :

$$
\begin{aligned}
\exp(2i\pi\nu t')\widehat{f}(\nu) &= \widehat{f_2}(\nu)\{f_1 * \exp(2i\pi\nu t)\}(t')\\
&= \widehat{f_2}(\nu)\widehat{f_1}(\nu) \exp(2i\pi\nu t') \qquad \text{par une application de (1) à } f_1.
\end{aligned}
$$

Reste alors à diviser par $\exp(2i\pi\nu t')$.

III. Signal numérique

a) Il faut avoir appliqué un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure 750Hz, afin d'éviter le repliement spectral.

b) La largeur du spectre est ainsi de 1500Hz (en comptant les fréquences négatives) si le filtre est idéal, c'est-à-dire s'il coupe parfaitement les fréquences supérieures à 750Hz.

c) Largeur $T = 1024 * (1/1500)\text{s} \simeq 0,683$ s.

Distance $\nu_0 = 1/T \simeq 1,465$ Hz.

d) Les questions a) et b) font référence à la duplication spectrale. La suivante à la troncature.

IV. Calcul numérique

Cette partie est empruntée à un sujet d'examen posé en janvier 1997 en 2ème année du cycle d'ingénieurs de l'École et Observatoire des Sciences de la Terre de Strasbourg.

1.a) On transforme la TF intégrale en TF discrétiséee. La troncature (et Nyquist) donne le pas en fréquence et le critère de Nyquist la longueur de la TF. La FFT est une astuce de calcul consistant à faire 2 TF de longueur $N/2$ au lieu d'une de longueur N et à répéter m ($N = 2^m$) fois l'opération.

1.b) On met 0 pour les trois dernières valeurs pour que le nombre de valeurs soit une puissance de 2 et que l'on utilise ainsi le schéma de la FFT plutôt que la TFD (dans le cas de $N = 8$ cela n'a en fait guère d'importance).

1.c) Le nombre de valeurs de la FFT est le même que celui de la fonction de départ $N = 8$. La pas en fréquence est l'inverse de la longueur : $\nu_0 = 1/8$ s = 0,125 Hz. La première valeur est bien $F_0 = 4 + 3 + 7 - 9 + 1 = 6$. Elle correspond à la fréquence nulle, c'est-à-dire à la somme de toutes les valeurs (c.-à-d. la valeur moyenne multipliée par le nombre de valeurs).

2.a) La TF d'une sinusoïde est somme de deux diracs donc la TF est réelle. Cependant, dans le cas présent il s'agit d'un fonction numérisée donc d'un TFD. Nous allons donc étudier $\mathbf{y}$ et en particulier déterminer si ce complexe est égal à son conjugué, cas dans lequel il est en fait réel. La TFD s'écrit :

$$F_k = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nk}$$

de sorte que son conjugué est :

$$\overline{F_k} = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \overline{W}^{nk} = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{-nk}$$

Le terme $n = 0$ est évidemment réel. Pour les autres termes il faut remarquer qu'il y a une certaine « symétrie » par rapport à $n = N/2$; plus précisément $W^N = 1$ donc $W^{-nk} = W^{(N-n)k}$. Ainsi, en faisant le changement $n' = N - n$:

$$\overline{F_k} = \frac{T}{N}\left(f_0 + \sum_{n=1}^{N-1} f_n W^{(N-n)k}\right) = \frac{T}{N}\left(f_0 + \sum_{n'=1}^{N-1} f_{N-n'} W^{n'k}\right)$$

Or F_k est réel si $F_k = \overline{F_k}$ c'est-à-dire si $f_{N-n} = f_n$ pour tout n non nul, autrement dit si f_n est symétrique par rapport au milieu du signal ce qui n'est pas le cas ici. Donc `y` est complexe.

2.b) Longueur du signal $T = 0,6$ s car l'echantillonnage est de 1000 s^{-1}. Le pas en fréquence est $\nu_0 = 1/T = 1/(0,6\text{s}) \simeq 1,6667$ Hz.

2.c) `spy` est la puissance spectrale (c'est le carré du module de la TF). La TF d'un cosinus étant :

$$TF(\cos) = \frac{1}{2}(\text{un dirac} + \text{son symétrique})$$

les valeurs 1 et 0,25 correspondent aux facteurs 2 et 1 (divisés par 2 et élevés au carré) devant les cosinus. Le diviseur 600, qui est le nombre N de points, permet de retrouver graphiquement ces facteurs. Il correspond à un autre choix de TFD que celles du cours et de MATLAB :

$$F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nk} = \frac{1}{T}F_k(\text{du cours}) = \frac{1}{N}F_k(\text{de MATLAB}).$$

Alors :

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{nk},$$

si bien que cette définition de F_k représente l'amplitude des coefficients des sinusoïdes de f.

2.d) La TF de deux sinusoïdes est deux double-diracs. Les amplitudes ont été normalisées en divisant par 600. Les deux premiers pics représentent les diracs à 50 et 120 Hz. Les deux derniers sont les symétriques des deux premiers, (le signal est réel) dupliqués c'est-à-dire périodisés à la fréquence d'échantillonnage. Cela rend le spectre symétrique par rapport à son milieu. L'amplitude 0,25 correspond à 0,5*0,5. Le nombre de points est 0,6/0,001=600.

2.e) Les valeurs de `f` portées en abscisse sont les fréquences d'échantillonnage spectrale :

$$\nu_k = k\nu_0 = \frac{k}{T} = \frac{k}{0,6}\text{Hz}$$

L'unité de l'ordonnée est le carré de celle du signal (inconnue ici). L'abscisse est une fréquence d'unité le Hertz. La dernière valeur est $(N-1)\nu_0 = (N-1)/0,6 = 299/0,6 \simeq 498,333$.

Donnons une version complète de la création du vecteur `f` :

```
nyquist=1000/2                          % Fréquence de Nyquist
dnu=1/0.6                               % Pas en fréquence
n=nyquist/dnu                           % Nombre de points
f=0:dnu:(n-1)*dnu;                      % Vecteur des fréquences
```

On dessine `spy` pour des indices de 1 à 300 car le spectre est symétrique donc une moitié suffit. C'est pourquoi seule la partie de 0 à 500 Hz est utile.

——— Fin ———