Traitement du Signal Exam Mai 2005. Correction.

I Signal numérique.

a) Il faut avoir appliqué un filtre analogique de fréquence de coupure 750 Hz afin d'éviter le repliement spectral.

b) Fréquences $\in [-750, +750]$ Hz donc largeur $= 1500$ Hz.

c) Pas d'échantillonnage $= 1/1500$ s donc $T = \frac{1024}{1500} = 0,683$ s.

Distance $\nu_0 = 1/T = 1,465$ Hz

d) Question a et b : duplication spectrale, c : troncature.

II Transformée de Fourier

a) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$ donc

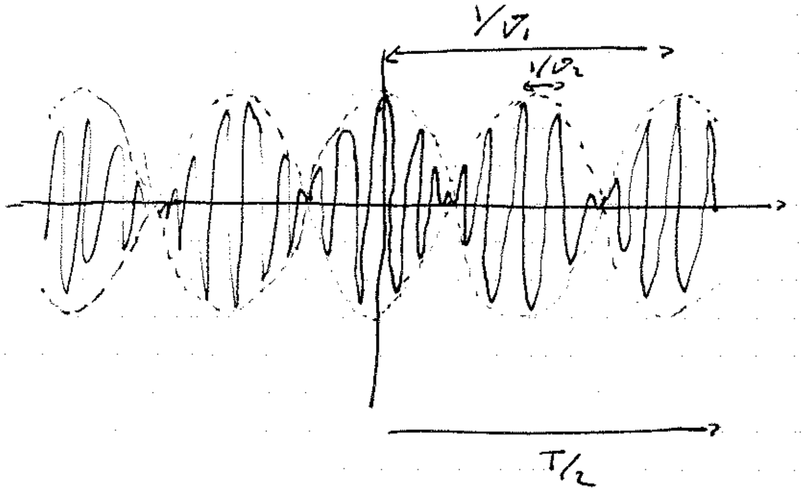
$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\cos 2\pi(\nu_1+\nu_2)t + \frac{1}{2}\cos 2\pi(\nu_1-\nu_2)t\right) p(t)$$

b) on a $TF(\cos 2\pi(\nu_1+\nu_2)t) = \frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_1-\nu_2) + \frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_1+\nu_2)$ (cours)

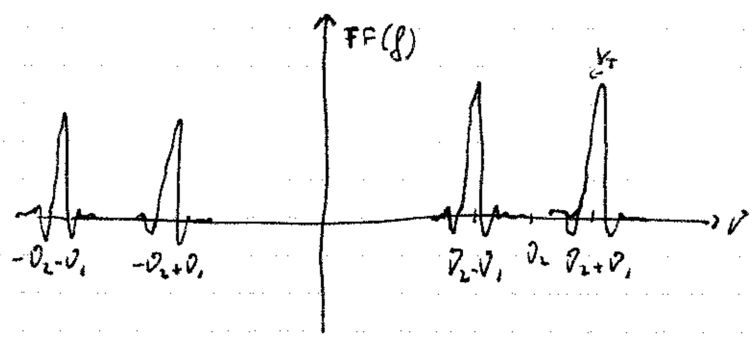
et $TF(p(t)) = T\,\mathrm{sin_c}(T\nu)$ donc, par convolution :

$$TF(f)(\nu) = \frac{T}{4}\Big\{\mathrm{sin_c}\,T(\nu-\nu_1-\nu_2) + \mathrm{sin_c}\,T(\nu+\nu_1+\nu_2) + \mathrm{sin_c}\,T(\nu-\nu_1+\nu_2) + \mathrm{sin_c}\,T(\nu+\nu_1-\nu_2)\Big\}$$

c) Si $\nu_2 \gg \nu_1$ f est une sinusoïde de freq ν_2 modulée en amplitude :



d)



e) Il faut que freq. d'échantillonnage $> 2(\nu_2+\nu_1) \simeq 2\nu_2$ (Nyquist)

Et que $1/T <$ l'écart entre 2 pics $= 2\nu_1$

$<$ écart entre 2 pics centraux $= 2(\nu_2-\nu_1) \simeq 2\nu_2$

pour que les pics soient séparés, càd que $\frac{1}{T} < 2\nu_1 \iff T > \frac{1}{2\nu_1}$.

III Distributions

$$< S, \varphi > = \int_0^{\infty} a t^2 \varphi(t) dt$$

$$< S', \varphi > = - < S, \varphi' > = - \int_0^{\infty} a t^2 \varphi' dt$$

$$= \underbrace{[-a t^2 \varphi]}_{=0} + \int 2at \varphi \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} 2at \varphi(t) dt \quad \text{donc}$$

S' = distrib régulière def par $s(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = 2at & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

càd $S' = 2at \, H(t)$.

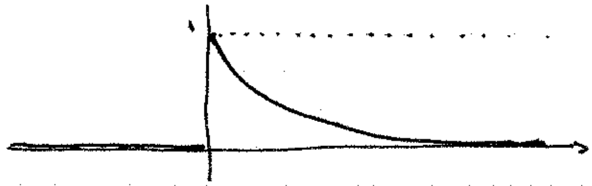
De même $S'' = 2a \, H(t)$.

Et enfin on sait que $H' = \delta$ donc

$$S'''(t) = 2a \, \delta(t)$$

IV TF et distributions.

a)



b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \exp(-\varepsilon t) = 1$ donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(t) = H(t)$

c) $$\widehat{H}_\varepsilon(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon t}\, H(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(2i\pi\nu+\varepsilon)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(2i\pi\nu+\varepsilon)t}}{-(2i\pi\nu+\varepsilon)} \right]_0^\infty \qquad \text{or } e^{-\varepsilon t} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc}$$

$$= \frac{1}{2i\pi\nu+\varepsilon} .$$

$$= \frac{1 \times (\varepsilon - 2i\pi\nu)}{(\varepsilon+2i\pi\nu)(\varepsilon-2i\pi\nu)} = \frac{\varepsilon - i 2\pi\nu}{\varepsilon^2+4\pi^2\nu^2} \quad \text{cqfd.}$$

d) $$h_\varepsilon(\nu) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+4\pi^2\nu^2}$$

$$\int h_\varepsilon(\nu)\, \varphi(\nu)\, d\nu = \int \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+4\pi^2\nu^2}\, \varphi(\nu)\, d\nu \qquad \text{posons } \nu = \varepsilon\nu'$$

$$= \int \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+4\pi^2\nu'^2\varepsilon^2}\, \varphi(\varepsilon\nu')\, d\nu'$$

$$= \int \frac{1}{1+4\pi\nu'^2}\, \varphi(\varepsilon\nu')\, d\nu'$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{1+4\pi\nu'^2}\, \varphi(0)\, d\nu'$$ (il faudrait le montrer en toute rigueur)

or $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{1+4\pi\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $\qquad x = 2\pi\nu$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^{\infty} = 1/2$$

donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon \varphi = \varphi(0)/2 = \left\langle \frac{\delta}{2}, \varphi \right\rangle$

donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

e) $\quad \mathrm{Re}\ TF(H) = \mathrm{Re}\ \lim TF(H_\varepsilon)$

$$= \lim h_\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta(\nu)$$