‘

1. En utilisant le théorème de la divergence (quelque soit son nom), on obtient pour l'intégrale :
$$\int_{V(r)} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_{S(r)} \rho C_p v_z T\,\mathrm{d}S + \int_{S(R_e)} k\,\frac{\partial T}{\partial r}\,\mathrm{d}S - \int_{S(r)} k\,\frac{\partial T}{\partial r}\,\mathrm{d}S + \int_{V(r)} \rho h\,\mathrm{d}V, \quad (1)$$
où l'on a utilisé la condition limite de non-pénétration à la surface $u_z(R_e) = 0$ et la condition d'incompressibilité $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Cette équation peut être réordonnée pour exprimer le flux à la surface en fonction des autres termes :
$$Q_s \equiv -\int_{S(R_e)} k\,\frac{\partial T}{\partial r}\,dS = -\int_{V(r)} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{S(r)} \rho C_p v_z T\,\mathrm{d}S - \int_{S(r)} k\,\frac{\partial T}{\partial r}\,\mathrm{d}S + \int_{V(r)} \rho h\,\mathrm{d}V, \quad (2)$$
avec dans l'ordre d'apparition à droite : le refroidissement séculaire de la coquille, le flux advectif au travers de $S(r)$, le flux conductif au travers de $S(r)$ et le chauffage radioactif de la coquille.
2. Le manteau étant supposé incompressible, la vitesse verticale a une moyenne nulle :
$$\overline{v_z} \equiv \frac{1}{S(r)} \int_{S(r)} v_z\,\mathrm{d}S = 0. \quad (3)$$
Sans perte de généralité, on peut écrire $T = \overline{T} + \delta T$. On peut alors écrire l'advection comme
$$Q_{adv}(r) = \int_{S(r)} \rho C_p v_z T\,\mathrm{d}S = \rho C_p \overline{T} \int_{S(r)} v_z\,\mathrm{d}S + \int_{S(r)} \rho C_p v_z \delta T\,\mathrm{d}S, \quad (4)$$
où $\overline{T}$ a pu être sorti de la première intégrale car sa valeur ne dépend pas de la position sur la surface. D'après l'équation (3), la première intégrale dans le terme de droite est nulle est on obtient le résultat demandé. Cette équation signifie que pour que la convection transporte de la chaleur il faut que les variation latérales de v_z et de δT soient corrélées et, pour le flux soit vers le haut, il faut que les courants montants soient chauds et les courants descendant froids. Du fait de la positivité du coefficient de dilatation thermique, c'est le cas.
3. Dans le cas stationaire, le premier terme dans le membre de droite de l'équation (2) est nul. Le profil de température moyenne a deux couches limites dans lesquelles le gradient vertical de température est grand et un cœur bien mélangé dans lequel ce gradient est presque nul. Dans ce cas, le terme de flux conductif est négligeable en dehors des couches limites. On peut alors utiliser l'équation (2) pour obtenir la variation de l'advection dans le manteau :
$$Q_{adv}(r) = Q_s - \int_{V(r)} \rho h\,\mathrm{d}V. \quad (5)$$
Cette équation a une interprétation simple : le flux qui sort à la surface est égal à celui qui entre par advection au rayon r plus celui qui est produit par radioactivité entre les deux. Comme on a supposé que ρ et h sont constants, on a simplement
$$Q_{adv}(r) = Q_s - \frac{4\pi}{3}\rho h\left(R_e^3 - r^3\right). \quad (6)$$
En l'absence de radioactivité, Q_{adv} est indépendant du rayon, alors qu'avec de la radioactivité, il augmente comme r^3. Pour obtenir la densité de flux correspondante, il suffit de diviser par $4\pi r^2$. Dans les couches limites, l'advection diminue pour atteindre 0 aux surfaces horizontales. Le gradient de température doit alors augmenter pour que la conduction puisse prendre le relai et c'est l'origine des couches limites.

4. Le flux de chaleur advecté est donné, de manière générale, par l'équation (4). Si on ne prend en compte que les plaques subductées, on obtient

$$Q_{subd} = \int_{S_{subd}} \rho C_p v_z \delta T \,\mathrm{d}S \tag{7}$$

la surface d'intégration étant celle des subductions, puisqu'ailleurs l'anomalie de température est supposée nulle. On considère une vitesse verticale uniforme dans la plaque et C_p et ρ sont supposés constants. C'est donc la moyenne de l'anomalie thermique dans la plaque qu'il faut estimer. En prenant une approximation linéaire entre 0 et 1300°C, on obtient $\delta T \sim 650$K. Le flux de subduction s'écrit donc

$$Q_{subd} = \rho C_p v_z \delta T L \delta. \tag{8}$$

5. On cherche v_z tel que $Q_{subd} = Q_{oc} = 29$TW. On prend $C_p = 1000$J kg^{-1}K^{-1}, $\rho = 3000$kg m^{-3}, $\delta = 100$km et on obtient $v_z = 2.97$m s^{-1} $= 9.3$cm an^{-1}. Cette vitesse est similaire à la vitesse horizontale à la surface et montre que le flux de chaleur à la surface peut être entièrement équilibré par le flux des plaques froides dans le manteau.