Géophysique - M1, DSM, ENS de Lyon

Examen 2018, 2 h 30 - document autorisé : aucun

Le sujet est probablement trop long pour 2 h 30. Le barème en tiendra compte.

I. Volcanologie : Effet d'un empilement de lave à l'évent du conduit

Un réservoir de magma de volume V est en surpression ΔP par rapport aux roches environnantes. Il est relié à la surface par un conduit cylindrique de hauteur H et de rayon R (Figure 1). Le réservoir est alimenté par un flux volumique continu Q_0. Le magma est supposé incompressible, de viscosité constante μ, de densité ρ égale à celle des roches encaissantes. Le problème est axisymétrique, à deux dimensions (r et z). La conservation de la masse donne $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = 0$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse. Dans le conduit, la vitesse est supposée seulement verticale, (composante notée w).

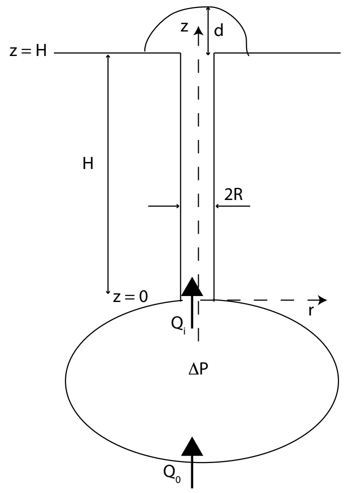


FIGURE 1 – **Schema**

1/ La conservation de la quantité de mouvement donne ainsi :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \tag{1}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \rho g \tag{2}$$

a) Pourquoi les termes inertiels et le terme $\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ n'apparaissent-ils pas ?

b) Un empilement de lave de hauteur d est présent à l'évent du conduit. Quelles sont les conditions de pression en $z = 0$ et $z = H$?

c) Intégrer l'équation, en explicitant les deux conditions aux limites choisies, pour obtenir l'expression de $w(r)$.

d) Exprimer le flux volumique Q_i en fonction des données du problème.

2) Le milieu environnant est élastique et se déforme du fait de la surpression du magma. La variation de volume du réservoir ΔV est lié à la surpression du réservoir par :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta P}{K} \tag{3}$$

où K est la rigidité effective du réservoir qui dépend de sa géométrie et V_0 son volume pour une surpression nulle.

a) En applicant la conservation de la masse de magma au sein du réservoir, montrer que ΔP suit l'équation suivante :

$$\frac{d\Delta P}{dt} + \frac{\Delta P}{\tau} = C \tag{4}$$

où τ est un temps caractéristique et C une constante que vous exprimerez en fonction des données du problème.

b) Résoudre cette équation pour une surpression initiale égale à ΔP_i.

3) Calculer le volume de magma émis en $z = 0$ en fonction du temps pour un flux d'alimentation nul $Q_0 = 0$ et le représenter en fonction du temps avec ou sans (i.e. $d = 0$) la présence d'un empilement de lave à l'évent.

4) Quel est l'effet de l'empilement de lave à l'évent ?

II. Convection : une couche stratifiée au sommet du noyau de la Terre ? (1h)

L'existence d'une couche stratifiée au sommet du noyau est actuellement débattue. Celle-ci dépend grandement de la valeur de la conductivité thermique du noyau, dont la valeur est également l'objet d'études actuelles. Dans cet exercice, nous ferons des hypothèses sur certaines grandeurs physiques dans le noyau et nous en déduirons de quelle manière l'épaisseur d'une couche stratifiée dépend de la conductivité thermique.

1) Donner l'expression du gradient adiabatique $\mathrm{d}T_a/\mathrm{d}r$, sachant qu'il dépend du coefficient d'expansion volumique α, de la gravité g, de la température T et de la capacité calorifique spécifique à pression constante c_p. Dimensionnellement, toute ambiguité devrait être levé si on ajoute que $\mathrm{d}T_a/\mathrm{d}r$ est proportionnel à α.

2) On suppose que $g = g_c r/r_c$, où $g_c = 10$ m s^{-2} est la gravité à la frontière noyau-manteau (CMB en anglais) et $r_c = 3480$ km est le rayon du noyau. La variable r désigne le rayon du point considéré. On suppose également que c_p est constant $c_p =$ 1000 J kg^{-1}K^{-1}. Enfin, on suppose que le produit αT^3 est constant dans tout le noyau, égal à $\alpha_0 T_0^3$, où $T_0 = 5500$ K est la tempŕature au centre du noyau (en $r = 0$, on suppose qu'il n'y a pas de graine) et $\alpha_0 = 1.2\ 10^{-5}$K^{-1}, au centre également. Déterminer le profil adiabatique (ou isentrope) de température dans tout le noyau.

3) En l'absence de chauffage radioactif dans le noyau, en l'absence de changement de phase (pas de graine), le flux de chaleur sortant du noyau est lié au refroidissement (séculaire) de la planète. Nous supposerons ici que la température décroît de 100 K tous les milliards d'années $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = -100$ K Gy^{-1}, en tout point du noyau. Nous considérerons également que la masse volumique est uniforme et égale à $\rho_c = 11000$ kg m^{-3}. Déterminer le profil radial de la densité de flux de chaleur ϕ dans le noyau.

4) Pour deux valeurs de la conductivité thermique $k = 30$ W m^{-1}K^{-1} et $k = 50$ W m^{-1}K^{-1}, déterminer s'il existe une couche stable au sommet du noyau et quelle est son épaisseur.

III. Forme de la Terre et sismologie

1. Donnez, en u.s.i., les valeurs de la vitesse de rotation angulaire de la Terre ω, du rayon terrestre R, et de la pesanteur moyenne g. En déduire, en expliquant votre choix, un *ordre de grandeur* de l'aplatissement de la Terre.

2. Au centre du plateau tibétain, d'altitude $h = 5$ km, on effectue une mesure de pesanteur et on trouve une anomalie de pesanteur (différence avec une pesanteur « standard » à altitude 0 loin du plateau) de $\Delta g = -1550$ mGal (rappel : 1 Gal = 1 cm/s^2).

a) Quel est le principe de cette mesure ?

b) Corrigez cette mesure de l'altitude. Est-ce que cela correspond à la valeur que la carte suivante indique ?

c) Quelle est l'attraction générée par un plateau crustal d'épaisseur h (si on a oublié la relation, on pourra la redémontrer rapidement en utilisant $\int_S \vec{g}\cdot\vec{n}\, \mathrm{d}S = -4\pi G \int_V \rho\, \mathrm{d}V$) ? Comparez à la valeur trouvée à la question précédente (soit la mesure corrigée, soit la valeur approximative donnée par la carte), expliquez.

3. Le long de leur propagation dans la Terre, les rais sismiques sont-ils déviés vers le haut ou le bas ? Expliquez.

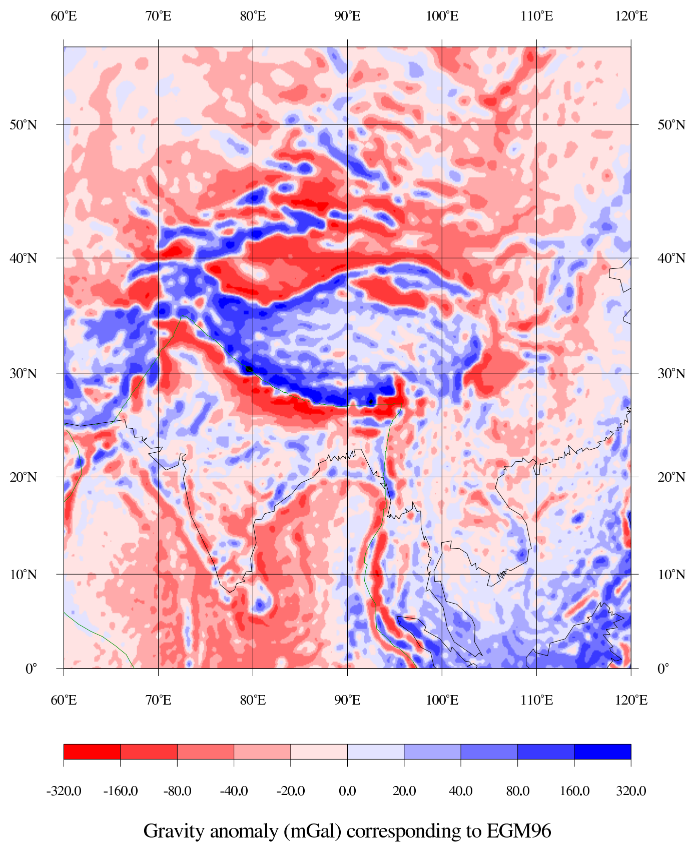
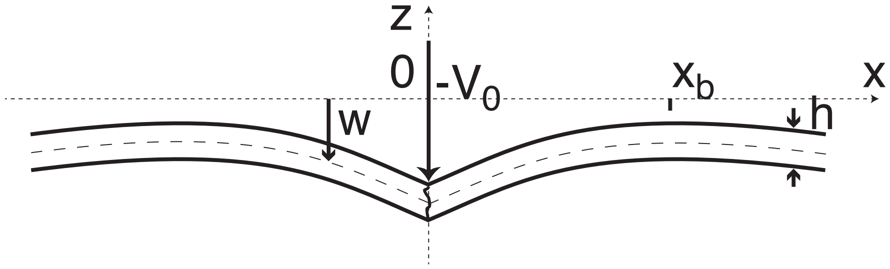


FIGURE 2 – Anomalies de pesanteur à l'air libre (mGal), c'est-à-dire corrigé de l'effet de l'altitude, dans la région du plateau tibétain (au centre).

IV. [page suivante]

Flexure de la lithosphère sous l'effet d'une chaîne volcanique



Nous allons étudier dans cette partie l'effet d'une chaîne volcanique, considérée comme une ligne de masse en $x = 0$, d'amplitude V_0. L'application de cette force induit un enfoncement de la plaque au point d'application et on on note w la topographie créée, comptée positivement vers le bas. On rappelle que le moment M, dans la direction perpendiculaire au plan de la page et appliqué en chaque point, est relié à la topographie par

$$M = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -D \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\,, \tag{1}$$

avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, h l'épaisseur de la plaque et D la rigidité flexurale. On rappelle également que l'équation de flexure que doit satisfaire la profondeur du plancher sous l'effet d'une distribution de masse $q(x)$:

$$D \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + (\rho_m - \rho_w) g w = q(x), \tag{2}$$

avec ρ_m et ρ_w les masses volumiques du manteau et de l'eau, respectivement, et g l'accélération de la gravité. Nous allons ici faire l'hypothèse que la mise en place de la chaîne a suffisamment affaiblit la plaque pour qu'elle casse (voir figure). De ce fait, la partie gauche de la plaque n'applique plus aucune contrainte sur la partie droite et réciproquement.

1. Quelles sont les dimensions des différentes quantités qui apparaissent dans l'équation (2) ?
2. Comment représente-t-on mathématiquement la ligne de masse en $x = 0$. Quelle doit être l'unité de V_0 pour être cohérente avec l'équation de flexure ?
3. Par analyse dimensionnelle, donner une échelle caractéristique de longueur, α sur laquelle varie w.
4. Donner la solution générale à l'équation différentielle satisfaite par la profondeur du plancher océanique (eq. 2).
5. Quelles sont les conditions limites à satisfaire en $x = \pm\infty$? Expliquer pourquoi on ne peut satisfaire avec la même solution la condition en $+\infty$ et celle en $-\infty$ et comment, à partir de la solution pour $x > 0$ on détermine celle pour $x < 0$.
6. Que signifie le fait que la plaque soit cassée en $x = 0$ en terme de moment appliqué ? En déduire une condition limite supplémentaire et son implication pour la solution pour $x > 0$. Écrire la forme complète de la solution, valable pour tout x.
7. Pour déterminer la dernière constante du problème, écrire une forme intégrale de l'équation de flexure sur l'intervale $[-\epsilon, \epsilon]$ avec ϵ que l'on fera tendre vers 0.
8. Déterminer la position x_b du soulèvement maximum.
9. Appliquons ce modèle à Hawai'i : la distance à laquelle se trouve le maximum du soulèvement est $x_b = 250$km. En prenant $\rho_m - \rho_w = 2300$kg m^{-3}, $E = 70$ GPa et $\nu = 0.25$, déterminer D et l'épaisseur h de la lithosphère.