Géophysique - M1 de physique, ENS de Lyon

Examen, mars 2016, 3 h 00 - document autorisé : cours

— o —

Les 3 problèmes sont indépendants. Les nombres de points indiqués sont approximatifs.

I. Transfert de chaleur convectif dans le manteau (7 points)

On admettra que l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T) + \rho h. \tag{1}$$

Afin de simplifier au maximum le travail, on suppose que tous les paramètres physiques (ρ, k, C_p, h) sont constants et uniformes. On supposera également que le manteau est incompressible et la vitesse verticale à la surface est nulle.

1. Pour le manteau terrestre, dont les rayons internes et externes sont notés R_i et R_e, écrire l'intégrale de l'équation (1) sur la coquille sphérique comprise entre r et R_e (dont on note le volume $V(r)$ et la surface inférieure $S(r)$) et faire apparaître en particulier les termes suivants : flux de chaleur (conductif) à la surface, flux de chaleur conductif au travers de la sphère de rayon r, flux advectif au travers de la même sphère, refroidissement séculaire de la coquille et son chauffage radioactif.

2. Expliquer pourquoi le terme advectif peut s'écrire sous la forme

   $$Q_{adv}(r) = \int_{S(r)} \rho C_p v_z \delta T \, \mathrm{d}S, \tag{2}$$

   $S(r)$ étant la sphère de rayon r, v_z la composante verticale de la vitesse et δT l'anomalie de température par rapport à la moyenne au même rayon. Comment interpréter cette expression d'un point de vue dynamique ?

3. Dessiner schématiquement le profil de température moyenne en fonction de la profondeur. En considérant le cas stationnaire, écrire comment varie le flux advectif en fonction du rayon, avec ou sans radioactivité, en dehors des couches limites. Que se passe-t-il dans les couches limites ?

4. Considérons l'écoulement associé à une zone de subduction (fig. 1) et le transfert de chaleur associé. Exprimer le flux de chaleur total advecté par une plaque en subduction de longueur L qui s'enfonce dans le manteau à la vitesse v_z (supposée uniforme dans la plaque).

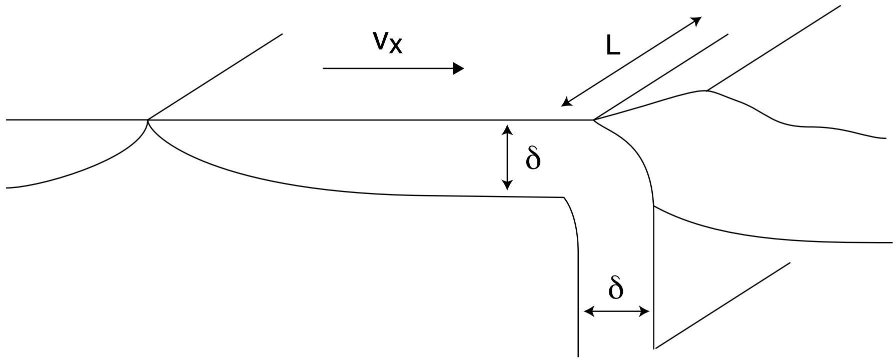

FIGURE 1 – Schéma de principe d'une zone de subduction.

5. Sachant que la longueur totale de subduction est d'environ 50000 km, et en prenant pour épaisseur de la plaque $\delta = 100$ km, quelle vitesse verticale moyenne est nécessaire pour équilibrer le flux de chaleur total océanique. Vous prendrez les valeurs des paramètres qui vous semblent raisonnables. Discuter du résultat.

II. Rétrogradation des noeuds de l'orbite lunaire (8 points)

On veut estimer le lent mouvement de l'orbite de la Lune sous l'effet de l'aplatissement de la Terre.

On considère pour cela une moyenne sur une révolution du satellite : on remplace la Lune par un anneau xPy (cf. figure) très fin circulaire situé à la même distance $r = OP$ du centre de la terre O, de même masse m que la Lune, et tournant autour de Oz en environ 27 jours.

On note : Oab le plan de l'équateur terrestre ; Oc l'axe des pôles ; $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de $Oxyz$ par rapport à $Oabc$; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ses composantes dans le repère $Oxyz$; $\Omega = \dot{\theta}\vec{e}_z$; A', A', C' les moments d'inertie de l'anneau, par rapport au centre de la Terre O ; A, A, C ceux la Terre ; M' la masse de la Lune ; M celle de la Terre ; R le rayon moyen de la Terre. Le référentiel $Oabc$ est ici supposé galiléen.

Il y a beaucoup de questions mais la plupart sont courtes.

1. Rappeler comment s'exprime le moment cinétique $\vec{H}$ de l'anneau en fonction de A', B', C' ? Comment s'exprime $\vec{\omega}$ en fonction des 3 angles d'Euler et des vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_c, \vec{e}_z$? Même question en fonction des vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$?

2. On rappelle que dans $Oxyz$ le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} + (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \wedge \vec{H} = \vec{C}. \tag{3}$$

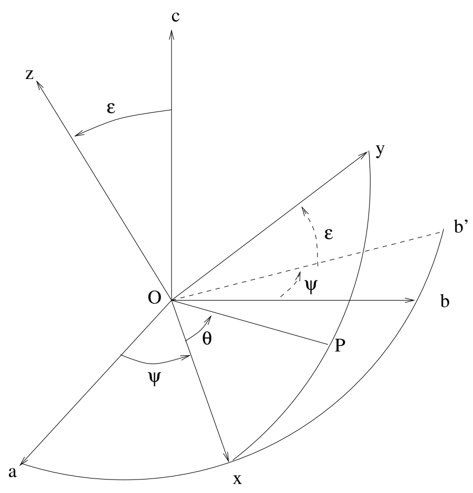

FIGURE 2 – *Orbite xPy du satellite autour du centre de la Terre O et angles d'Euler.*

Montrer que le terme à gauche de l'égalité peut s'approximer par ;

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} + (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \wedge \vec{H} = \begin{pmatrix} C'\Omega \sin\varepsilon\, \dot{\psi} \\ -C'\Omega\dot{\varepsilon} \\ C'\dot{\Omega} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

3. Soit $\vec{g}(P) = \vec{\mathrm{grad}}\phi$ l'attraction de la Terre et $\mathrm{d}\vec{C}$ le couple de cette attraction sur un élément de masse ponctuel $\mathrm{d}M'$ de l'anneau situé au point P entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. Exprimer $\mathrm{d}\vec{C}$ en fonction de $\vec{g}(P)$.

On rappelle que le potentiel de la Terre peut s'écrire approximativement :

$$\phi(r, c) = \frac{GM}{r} - G\,\frac{C - A}{r^5}\,\frac{3c^2 - r^2}{2} \tag{5}$$

et on admettra que

$$\vec{\mathrm{grad}}\phi(r, c) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{\partial\phi}{\partial c}\,\vec{e}_c. \tag{6}$$

En déduire que dans $Oxyz$:

$$\mathrm{d}\vec{C} = -\frac{3G\,\mathrm{d}M'\,(C - A)}{r^3}\sin\theta\,\sin\varepsilon \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varepsilon \\ -\cos\theta\cos\varepsilon \\ \cos\theta\sin\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{7}$$

4. En déduire que le couple sur tout l'anneau s'écrit :

$$\vec{C} = -\frac{3G\,M'\,(C - A)}{2r^3}\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

5. En déduire le mouvement de l'orbite. Comment peut-on le nommer autrement que « rétrogradation des noeuds de l'orbite lunaire » ?

6. Comment s'exprime C' en fonction de M' et r ?

7. Montrer finalement que

$$\frac{\dot{\psi}}{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{C-A}{MR^2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\varepsilon. \tag{9}$$

Ce terme s'appelle le « moyen mouvement » de la Lune.

8. Rappelez d'où vient la différence entre C et A. En déduire un ordre de grandeur de $J_2 = \frac{C-A}{MR^2}$. Sa valeur observée est de $1,1.10^{-3}$. Sachant que la Lune est à 60 rayons terrestres et que son orbite est inclinée d'environ 23 degrés par rapport à l'équateur terrestre en déduire la période correspondant à $\dot{\psi}$. La première observation de J_2 par cette méthode a été faite par Helmert en 1884.

On observe un mouvement de ce type avec une période de 18,6 ans. A votre avis de que effet provient-t'il ?

9. Actuellement, c'est l'observation du $\dot{\psi}$ des satellites artificiels qui permet de mesurer l'*aplatissement dynamique* J_2. L'orbite du satellite Lageos-2 a une altitude moyenne de 5780 km, est inclinée de 52,64° sur l'équateur terrestre et précesse d'un tour pendant 3683 révolutions du satellite. En déduire une valeur numérique de J_2. Est-il plus facile de déterminer J_2 en observant le mouvement de l'orbite *lunaire* ? Pour information la période de révolution de Lageos-2 est 223 min [1].

III. Quelques questions de géophysique (5 points)

1. Sur quelle(s) composante(s) d'un sismomètre (longitudinale, transverse, verticale) une onde P est-elle visible, pourquoi ? (max 10 lignes)

2. En mesurant des temps de parcours d'ondes sismiques, comment voit-on que la Terre est proche de la symétrie sphérique ? (max 10 lignes)

3. Qu'est-ce que la force de marée ? (max 10 lignes)

4. Pourquoi la réponse de la Terre solide aux marées est-elle statique, pourquoi celle des océans aux ondes de marées diurnes et semi-diurnes est-elle dynamique ? (max 15 lignes)

Texte disponible à `http://frederic.chambat.free.fr/ens`

1. Les valeurs numériques de l'énoncé sont les valeurs réelles sauf 3683 que j'ai choisie de façon à trouver une valeur correcte de I/MR^2. La valeur obtenue pour J_2 ne correspond pas exactement à celle de la littérature où J_2 est défini par le rayon équatorial et non le rayon moyen.