Géophysique

Examen de mars 2013, 3 h - documents et calculatrices interdits

M1 physique, ENS Lyon

[Version corrigée]

1 Structure de la Terre

1. Expliquer les grands traits de la structure de la Terre (une page maximum).

2. Expliquer les grands traits de la structure de la lithosphère océanique (une page maximum).

2 Transfert de chaleur dans la lithosphère continentale

Le flux de chaleur est mesuré à la surface des continents et montre des variations latérales importantes. En l'absence de mouvement de convection au sein même de la lithosphère continentale, ces variations latérales peuvent être attribuées à des variations de la production radioactive et aux variations du flux de chaleur provenant du manteau convectif. L'objectif de cet examen est d'étudier ce problème et de montrer qu'il est possible de séparer les différentes sources de variations du flux de chaleur à la surface.

2.1 Généralités

On considère la lithosphère continentale comme un milieu bi–dimensionnel, infini dans la direction horizontale et d'épaisseur D. La température de surface est prise comme nulle et le flux (vertical) de chaleur en surface égal à $q(x)$ latéralement variable dont la moyenne horizontale est $\bar{q}$. De la chaleur est produite par radioactivité avec un taux par unité de masse noté $A(x, z)$, dépendant de la position. x est la position horizontale et z est la profondeur.

1. Faire un schéma synthétique du problème en faisant apparaître tous ses ingrédients.
2. Justifier que le flux de chaleur est vertical en surface.
3. Écrire l'équation générale de diffusion de la chaleur que doit satisfaire la température. En notant $h = A/C_p$ et en supposant la conductivité thermique constante, se ramener à l'équation la plus simple possible.
4. Exprimer mathématiquement les conditions à satisfaire en $z = 0$.

5. Montrer que la solution du problème peut être séparée en deux parties, une impliquant les variations du flux en surface et une concernant la production de chaleur par radioactivité avec des conditions aux limites homogènes (nulles).

6. En imposant le flux à la base de la lithosphère plutôt qu'en surface montrer que la solution du problème peut être séparée en deux parties, une concernant l'effet des variations du flux provenant du manteau convectif et une concernant la production de chaleur par radioactivité avec des conditions aux limites homogènes.

2.2 Solution sans radioactivité

Dans cette partie, on cherche la solution à l'équation de Laplace ($\nabla^2 T = 0$) dans notre domaine avec comme conditions en surface une température nulle et le flux imposé égal à $q(x)$.

1. Sans perte de généralité, on peut supposer que le flux en surface et la température peuvent s'écrire

$$q(x) = \bar{q} + Q(\omega)e^{i\omega x}, \tag{1}$$

$$T(x,z) = \bar{T}(z) + \tau(\omega,z)e^{i\omega x}, \tag{2}$$

$\bar{q}$ et $\bar{T}$ étant les moyennes horizontales. Justifier cette affirmation et discuter la signification de ω, $Q(\omega)$ et $\tau(\omega,z)$. Dans la suite on pourra noter simplement Q et τ.

2. Écrire les équations en volume et les conditions en surface satisfaites par $\bar{T}$ et τ.

3. Le problème est entièrement déterminé par deux nombres sans dimension R_1 et R_2. Faire le bilan des constantes du problème, donner R_1, R_2 et leur signification ? Qualitativement, comment varient Q et τ en fonction des deux nombres sans dimension ?

4. Déterminer explicitement la solution comme somme d'une partie indépendante de x et d'une solution en $e^{i\omega x}$. Discuter le résultat. Exprimer la température et le flux de chaleur vertical à la base de la lithosphère.

2.3 Application numérique

Dans le bouclier pré-cambrien d'Amérique du Nord, on observe des variations latérales de flux de chaleur d'une amplitude de ± 5 mWm^{-2} (c'est à dire 10 mWm^{-2} de pic à pic) sur une longueur d'onde d'environ 500 km. La valeur moyenne du flux

est de l'ordre de 40 $\mathrm{mWm^{-2}}$. La conductivité vaut $k = 3$ W/m/K. On pourra utiliser $\cosh(3,8) = \sinh(3,8) = 22$; $\cosh(0,6) = 1,2$; $\sinh(0,6) = 0,6$.

1. En supposant que ces variations du flux de chaleur proviennent uniquement du manteau convectif, à une profondeur $D = 300$ km, quelle est l'amplitude des variations de flux que l'on en déduit à cette profondeur ?
2. Quelles sont les variations latérales de température qui correspondent ? Est-ce raisonnable et qu'en déduire ?

3 Ondes de Rayleigh

On cherche à établir l'existence d'ondes de surface de Rayleigh en déterminant des solutions de l'équation d'onde dans une Terre plate (demi-espace infini homogène). On note Oz la direction verticale et $z = 0$ le sol.

On rappelle que $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{rot}} = 0$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{grad}} = 0$. On suppose (théorème de décomposition de Helmoltz) qu'on peut décomposer un champ de vecteur $\vec{u}$ de façon unique en

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \quad \text{avec} \quad \vec{u}_p = \vec{\mathrm{grad}}\varphi, \quad \vec{u}_s = \vec{\mathrm{rot}}\vec{\psi}, \quad \mathrm{div}\vec{\psi} = 0. \tag{3}$$

On admettra aussi :

$$(\mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\vec{u} = 0) \Leftrightarrow \vec{u} = 0. \tag{4}$$

1. On rappelle que $\rho\partial_t^2 u_j = \partial_i\sigma_{ij}$ et $\sigma_{ij} = \lambda\partial_k u_k\delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Que représentent ces deux relations ? En déduire l'équation de Navier-Stockes contrôlant $\vec{u}$. Montrer que $\vec{u}_s$, $\vec{u}_p$, φ et $\vec{\psi}$ vérifient l'équation d'onde. Que représentent ces solutions ?

2. Prenons une solution de la forme $\vec{u}_p = \vec{U}(z)e^{i(\omega t - kx)}$; montrer que $\vec{U}$ est de la forme $\vec{U} = \vec{A}\,e^{-\kappa z}$ avec $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ un vecteur constant. On prendra dans la suite κ réel, pourquoi ? Qu'implique $\mathrm{rot}\vec{u}_p = 0$ sur les A_i ?

3. Calculer les contraintes verticales correspondantes en surface, σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz}, en fonction de $\vec{A}$.

4. Idem pour $\vec{u}_s$: quelle est sa forme, calculer les contraintes en surface. Qu'implique $\mathrm{div}\vec{u}_s = 0$?

5. Appliquer les conditions aux limites (on pourra commencer par σ_{yz}) au déplacement total $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$.

6. En déduire que le mouvement se fait dans un plan ; en déduire également la relation qui lie k à ω (on ne demande pas de résoudre cette relation).

7. La solution est environ $\omega/k = 0,9V_S$. Commentaires.