

## Géophysique - M1, DSM, ENS de Lyon

Examen, mars 2010, 2 h 30 - document autorisé : cours Chambat & Ricard

**I.** Expliquez en deux pages maximum quels sont les principes de l'imagerie sismologique de la Terre et ses principaux résultats.

### II. Limite de Roche<sup>1</sup>

Le but du problème est d'estimer la *limite de Roche*, distance à la planète en dessous de laquelle un satellite peu résistant aux contraintes se brise sous l'effet des forces de marée exercées par la planète. Le satellite, approximé par une sphère de rayon  $r$ , de masse  $m$ , est en révolution autour de sa planète à une distance  $d$  constante (mouvement circulaire),  $d$  étant la distance de centre à centre. La planète est sphérique de rayon  $R$  et de masse  $M$  (fig. 1).

**1.** On suppose que le système est isolé et que  $m$  est petit devant  $M$ . Que peut-on choisir comme référentiel galiléen et pourquoi ?

**2.** Expliquer en quelques lignes pourquoi on pourra considérer que la vitesse de révolution du satellite est égale à sa vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ . Montrer que  $\Omega = \sqrt{GM/d^3}$ .

**3.** Exprimer, en fonction des données du problème, les forces (par unité de masse, ou accélérations) suivantes subies par le point  $P$  du satellite dans un référentiel d'axes attachés au satellite :

- force gravitationnelle exercée par le satellite,
- force de marée,
- force centrifuge.

**4.** Décrire l'effet physique de chacun de ces trois termes : ont-ils tendance à briser le satellite ou à le maintenir ?

**5.** En faisant un développement limité ( $r \ll d$ ), montrer que l'équilibre du satellite est lié à la fonction :

$$F = \frac{Gm}{r^2} - 3\frac{GMr}{d^3}. \quad (1)$$

**6.** En déduire qu'il y a une distance limite  $d_l$  (appelée limite de Roche) en dessous de laquelle le satellite se brise. Donner l'expression de  $d_l$  en fonction des données du problème. L'exprimer en fonction des densités  $\rho_M$  et  $\rho_m$  de la planète et du satellite. En 1850, Roche a trouvé  $d_l = 2,46 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}} R$ . Quels phénomènes ou forces a-t-on négligés ?

**7.** Mimas, le satellite de Saturne de densité 1,44 est situé à une distance de 3,08 fois le rayon de cette planète. Les anneaux de glace de Saturne sont à une distance comprise

<sup>1</sup>Les problèmes II et III compteront pour approximativement le même nombre de points.

entre 1,15 et 2,25 fois le rayon de la planète. La densité de Saturne est de 0,7. Est-ce que la théorie développée vous satisfait (la nôtre et/ou celle de Roche) ?

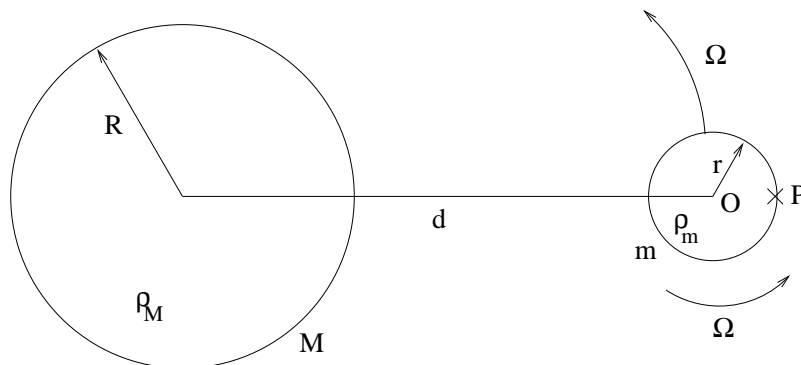


FIG. 1 – Planète et satellite.

### III. Modèle diffusif pour la température dans la Terre

On suppose que le flux de chaleur à la surface de la Terre, connu et égal à 46 TW, est équilibré par une production de chaleur radioactive et que le système est en état stationnaire.

1. En supposant que la Terre est homogène, quel équilibre peut-on écrire et quelle grandeur pertinente pour l'intérieur peut-on en déduire ?
2. Appliquer la conservation de l'énergie entre deux sphères concentriques de rayon  $r$  et  $r + dr$  et en déduire une équation différentielle satisfaite par le flux de chaleur  $q(r)$ . On supposera que le taux de production de chaleur radioactive par unité de volume  $h$  est uniforme.
3. Donner les conditions limites que doit satisfaire  $q(r)$  et en déduire la solution  $q(r)$ .
4. En supposant que la conductivité thermique est uniforme, en déduire la température au centre de la Terre (on supposera une température nulle en surface). A. N. :  $Q = 46 \text{ TW}$ ,  $R = 6400 \text{ km}$ ,  $k = 3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Discuter.
5. On suppose maintenant que la conductivité thermique dépend de la température sous la forme  $k(T) = k_0 \exp(T/T_k)$ . Déterminer la température au centre de la Terre dans ce cas là. A.N. :  $k_0 = 3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $T_k = 1300 \text{ C}$ . Discuter.
6. Enfin, on suppose maintenant que toute la radioactivité est concentrée dans une « croûte » fine d'épaisseur  $\delta \ll R$ . Exprimer la valeur du taux de production radioactive en fonction des paramètres du modèle. Déterminer la température au centre. Quelle épaisseur  $\delta$  faut-il choisir pour que cette température soit raisonnable ?

— o —