

# Introduction aux sciences de la Terre

## Examen du mercredi 12 janvier 2000

Magistère des sciences de la matière, Deuxième année, ENS Lyon.

Documents : cours, 2 pages d'énoncé + 2 feuilles de formulaire. Durée : 2h30

— o —

### Sismologie : Oscillations libres radiales d'une terre homogène

On cherche à déterminer les fréquences des vibrations propres **radiales** d'une Terre homogène, non gravitante, élastique, de rayon  $R$ . On utilise pour cela l'équation de Navier-Stockes contrôlant le déplacement élastique  $u$  :

$$\rho \partial_t^2 u = (\lambda + 2\mu) \text{grad div} u - \mu \text{Rot Rot} u. \quad (1)$$

avec  $u = u_r(r) e_r = U(r) e^{i\omega t} e_r$ ,  $e_r$  étant le vecteur de base radial.

**1.** Montrer que la symétrie du problème conduit à résoudre l'équation  $\rho \partial_t^2 u = (\lambda + 2\mu) \text{grad div} u$ . Que représentent  $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $k = \omega/c_P$  et  $\theta = \text{div} u$  ?

**2.** Montrer que  $\theta$  vérifie l'équation d'onde :  $\partial_t^2 \theta = c_P^2 \Delta \theta$ .

**3.** En posant  $\theta = \tilde{\theta} e^{i\omega t}$  en déduire que  $\tilde{\theta}$  est de la forme  $\tilde{\theta} = A \sin(kr)/r$ .

**4.** En déduire que  $U$  est de la forme :

$$U = \frac{A}{k^2 r^2} (\sin(kr) - (kr) \cos(kr)) \quad (2)$$

**5.** Déterminer les contraintes  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}$  (on pourra écrire  $\partial_r u_r = \text{div} u - 2u_r/r$  et poser  $c_S^2 = \mu/\rho$ ).

**6.** En considérant que la surface de la Terre est libre, montrer que les fréquences propres sont données par la relation :

$$1 - (kR) \cotg(kR) = (c_P k R / 2c_S)^2 \quad (3)$$

**7.** En utilisant l'approximation  $\lambda = \mu$ , et en posant  $x = kR$ , proposer une méthode graphique pour résoudre cette équation.

**8.** Un tracé de cette fonction révèle que les racines sont de l'ordre de  $x = (n + 1)\pi$  avec  $n$  entier, appelé ordre radial. Quelles sont les fréquences propres ?

**9.** On mesure les différentes fréquences propres suivantes (en mHz) :

n	f	df
0	0.81439	0.00003
1	1.63165	0.00008

2	2.50795	0.00025
3	3.27258	0.00033
4	4.10645	0.00041
5	4.88840	0.00049
6	5.74225	0.00057
7	6.58000	0.00066
8	7.42900	0.00074
9	8.26920	0.00083

où  $n$  est l'ordre radial,  $f$  la fréquence et  $df$  l'incertitude sur  $f$ . Donner le principe d'une telle mesure.

**10.** Que peut-on en déduire sur  $c_P$  ?

**11.** On discutera les incertitudes ainsi que les approximations effectuées.

**12.** Combien  $\tilde{\theta}_n(r)$  ( $=\tilde{\theta}$  à  $n$  fixé) a-t-il de zéros ? idem pour  $u_n$ . Représenter  $\tilde{\theta}_n(r)$ .

### Flux de chaleur et gradient géothermique

On cherche à estimer le flux de chaleur et la température à la base de la croûte. On rappelle  $q = -k \text{grad} T$  et  $\text{div} q = A$  avec  $q$  le flux de chaleur,  $k$  la conductivité thermique,  $T$  la température et  $A$  la production de chaleur. On note  $z$  la profondeur et on effectuera les calculs en symétrie plane (invariance horizontale).

Lors d'un forage profond de 250 m effectué sur un socle ancien granitique on constate qu'entre 50 et 250 m le gradient de température est quasi constant. On a mesuré :

$$T(50\text{m}) = (11,25 \pm 0,05) \text{ } ^\circ\text{C} \quad T(250\text{m}) = (16,25 \pm 0,05) \text{ } ^\circ\text{C}$$

La conductivité thermique mesurée entre ces profondeurs et supposée constante est estimée à  $k = (3,00 \pm 0,06) \text{ W/K/m}$ .

**1.** En déduire les valeurs du gradient géothermique ( $dT/dz$ ), de la température de surface  $T_0$  et du flux de chaleur en surface  $q_0$ . Avec quelle précision  $q_0$  est-il déterminé ?

**2.** On suppose que le taux de production de chaleur crustale est linéaire :  $A(z) = A_0 - bz$ , avec  $A_0 = 1,7 \mu\text{W/m}^3$ ,  $b = 3,8 \cdot 10^{-11} \text{ W/m}^4$ . Si l'épaisseur de la croûte est 40 km en déduire la valeur du flux de chaleur en provenance du manteau supérieur.

**3.** Calculer la température à la base de la croûte.

**4.** A quoi est-due la production de chaleur ? A votre avis comment estime-t-on  $A$  dans la croûte ? Et dans le manteau ?