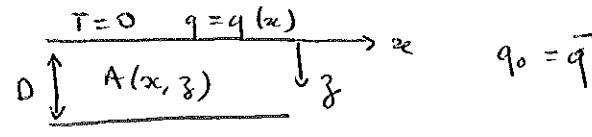


Transfert de chaleur
dans la lithosphère continentale

Correction. 5.03.13.

I. Généralités

1.



2: $T=0$ en surface donc $\frac{\partial T}{\partial z}=0$ donc $\vec{q} \text{ grad } T = (0, \frac{\partial T}{\partial z})$

3: Conservation de la chaleur $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho A - \text{div } \vec{q}$
 Conduction $\vec{q} = -k \vec{\text{grad}} T$ donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{C_p} + \frac{1}{\rho C_p} \text{div} (k \vec{\text{grad}} T) \quad \text{avec } k = \alpha t = \rho C_p K:$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + h$$

4: En surface ($z=0$): $\begin{cases} T=0 \\ k \frac{\partial T}{\partial z} = q \end{cases}$

5: soit T_1 vérifiant $\frac{\partial T_1}{\partial t} = K \Delta T_1$, $T_1=0$, $k \frac{\partial T_1}{\partial z} = q$,

soit T_2 — $\frac{\partial T_2}{\partial t} = K \Delta T_2 + h$, $T_2=0$, $k \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0$

alors $T = T_1 + T_2$ vérifie $\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + h$, $T=0$, $k \frac{\partial T}{\partial z} = q$.

6: Idem avec $k \frac{\partial T}{\partial z} = q$ en $z=D$ en lieu de $z=0$.

II Solution sans radioactivité

1. On a juste fait une T.F horizontale de $q - \bar{q}$:

$$q(u) - \bar{q} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

le problème étant linéaire on pourra traiter chaque modeu indépendemt.

Ainsi:

- ω = nb d'onde en x (on ne l'a pas noté k pour le différencier de la conductivité k)
- Q = TF de $(q - \bar{q})$
- Γ = TF horizontale de T

2. Les parties constantes et en $e^{i\omega x}$ se séparent donc :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{T} = 0 \\ \bar{T} = 0 \text{ en } z = 0 \\ k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \bar{q} \text{ en } z = 0 \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\Gamma e^{i\omega x}) = 0 \\ \Gamma = 0 \text{ en } z = 0 \\ k \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = Q \text{ en } z = 0 \end{array} \right.$$

3. Nombres constants du pb: \bar{q} , Q , ω , D , k

Deux nb ss dim: $R_1 = \frac{Q}{\bar{q}} = \frac{q \text{ variable}}{q \text{ moyen}}$

$$R_2 = \omega D = \frac{\text{Taille de lithosphère}}{\text{Taille des variations de } T}$$

La seule façon de faire T est = $\frac{\text{flux} \times \text{longueur}}{\text{conductivité}}$

donc $T = \frac{\bar{q} D}{k} f(R_1, R_2)$ ou si l'on veut :

$$\boxed{T = \frac{\bar{q} D}{k} f(R_1, R_2, w_x, w_z)}$$

le Δ flux de chaleur et la Δ température à la base :

- \rightarrow avec R_1 de façon évidente
- \rightarrow avec R_2 car plus la lith. est épaisse plus le flux du manteau arrive atteint en surface.

Solution

* Pour la partie constante (1) :

$$\bar{T} = \alpha z + \beta \quad k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \bar{q} \text{ en } 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\bar{q}}{k}$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{q} z}{k}$$

* Pour la partie variable (2) :

$$\tau'' e^{iwx} - \omega^2 \tau e^{iwx} = 0$$

$$\tau'' = \omega^2 \tau$$

$$\tau = a e^{wx} + b e^{-wx}$$

$$\tau(0) = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

$$T = 2a \operatorname{sh}(wz)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} = Q \Leftrightarrow k 2a \omega \operatorname{ch}(wz) = Q \text{ en } z=0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{Q}{2k\omega}$$

$$T = \frac{Q}{k\omega} \operatorname{sh}(wz)$$

la solution totale est donc :

$$T = \frac{\bar{q}}{k} z + \frac{Q}{k\omega} \operatorname{sh}(wz) e^{i\omega x}$$

$$T = \frac{\bar{q} D}{k} \left[\frac{z}{D} + \frac{Q}{\bar{q}} \frac{1}{wD} \operatorname{sh}(wz) e^{i\omega x} \right]$$

| | |
 échelle de T | |
 R₁ et R₂

$$T(0) = \frac{\bar{q} D}{k} \left[1 + \frac{Q}{\bar{q}} \frac{1}{wD} \operatorname{sh}(wD) e^{i\omega x} \right], \text{ Soit } j \text{ le flux à la base}$$

vertical

$$j(z) = k \frac{\partial T}{\partial z} = \bar{q} \left[1 + \frac{Q}{\bar{q}} \operatorname{ch}(wz) e^{i\omega x} \right]$$

$$j(0) = \bar{q} \left[1 + \frac{Q}{\bar{q}} \operatorname{ch}(wD) e^{i\omega x} \right]$$

Note : le flux en surface est bien

$$q = \bar{q} \left[1 + \frac{Q}{\bar{q}} e^{i\omega x} \right]$$

III Application numérique

1. les quantités précédentes s'écrivent (parties nèlles) :

$$\bar{f} = \bar{f}_0 \left(1 + \frac{\Delta f}{\bar{f}} \cos \omega x \right)$$

les Δf sont les variations latérales donc :

$$Q = 5 \text{ mW/m}^2$$

$$\bar{q} = 60 \text{ mW/m}^2$$

$$R_1 = \frac{Q}{\bar{q}} = \frac{1}{8}$$

Il vient donc à $z=0$ une variation de f :

$$\Delta f = Q \underbrace{\operatorname{ch}(wD)}_{22} = 110$$

$$R_2 = wD = \frac{2\pi \times 300}{500} = \frac{6\pi}{5} = 3,8$$

$$2. T = \frac{\bar{q}D}{k} \left[1 + \frac{Q}{\bar{q}} \underbrace{\frac{1}{wD} \operatorname{sh}(wD)}_{22} e^{i\omega x} \right]$$

$$= \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 300 \cdot 10^3}{8} \quad R_1 R_2 \approx \frac{1}{32} \quad \boxed{\Delta T = \frac{Q}{kw} \operatorname{sh}(wD)}$$

$$= 4000 \text{ K} \cdot \text{bcp}$$

$$(\text{T moyen en prof}) \quad \Delta T = 4000 \times \frac{1}{32} \times 22$$

$$= 2800 \text{ K}$$

± 2800 K c'est beaucoup trop, il y aurait des roches en fusion.

Même en donnant une valeur + réaliste à T , p.ex. 2000 K, on aurait $\Delta T = 1400$, donc T entre 600 et 3400 K : trop grand.

Donc le flux monte l'âge ne suffit pas à expliquer le flux en surface donc il y a de la re-distribution dans la roche.

Ondes de Rayleigh , Exam 4 2013

Complément à la cor" de nov 2008

$$\vec{u}_p = \tilde{A} e^{kz} e^{i(\omega t - ka)}$$

$$k^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2}$$

$$\text{rot } \vec{u}_p = \begin{pmatrix} -k A_y \\ k A_x + i k A_z \\ -i k A_y \end{pmatrix} e^{kz} e^{i(\omega t - ka)}$$

donc $\text{rot } \vec{u}_p = 0 \iff \begin{cases} A_y = 0 \text{ le mat est plan (ds } O_{xz}) \\ k A_x + i k A_z = 0 \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \rho (\partial_x u_y + \partial_y u_x) \\ = \rho (-i k A_z + k A_x) e^{kz} e^{i(\omega t - ka)} \\ = 2 \rho k A_x e^{kz} e^{i(\omega t - ka)} \end{array} \right.$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \text{div } \vec{u} + 2 \rho \partial_z u_y$$

$$\text{div } \vec{u} = (-i k A_x + k A_z) e^{i(\omega t - ka)}$$

$$\sigma_{zz} = (-i k \lambda A_x + (\lambda + 2\rho) k A_z) e^{kz} e^{i(\omega t - ka)}$$

$\boxed{\vec{u}_5}$

Premièrement $\vec{u}_5 = \vec{V}(z) e^{i(lw\vec{k} - \vec{k}z \cdot \vec{n})} = \vec{B} e^{iK' z} e^{i(lw\vec{k} - \vec{k}z \cdot \vec{n})} \quad K'^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2}$

$$\operatorname{div} \vec{u}_5 = (-ikB_{ax} + K'B_z) e^{iK' z} e^{i(lw\vec{k} - \vec{k}z \cdot \vec{n})}$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_5 = 0 \quad (\Rightarrow K'B_z = ikB_{ax})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \rho(-ikB_y + K'B_x) e^i \\ \sigma_{yz} = \rho K'B_y e^i \\ \tau_{yz} = 2\rho \eta_{yz} u_z = 2\rho B_y K' e^i \end{array} \right.$$

$\boxed{\sigma_{yz}=0}$

les conditions $\sigma_{yz} = 0$ à la norme et en $z=0$ donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\rho KA_x + \rho(-ikB_y + K'B_x) = 0 \quad B_y = 0 \\ -ik\lambda A_x + (\lambda + 2\rho)KA_z + 2\rho B_y K' = 0 \end{array} \right.$$

et il y a aussi $\left\{ \begin{array}{l} K'B_y = ikB_{ax} \\ KA_x = -ikA_z \end{array} \right.$

4eq^m, 4inconnues.

~~avec~~ Notons $a = KA_x$, $b = K'B_z$. Alors $\cancel{2\rho KA_x + \rho(-ikB_y + K'B_x)} = \cancel{\frac{K'^2}{ik}a} = \frac{K'^2}{ik}a$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\rho a + \rho \left(-ik \frac{b}{K'} + \frac{K'^2}{ik} a \right) = 0 \\ -ik\lambda \frac{a}{K} + (\lambda + 2\rho) \frac{K}{K'} a + 2\rho b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(2 - i \frac{K'}{K} \right) a - i \frac{k}{K'} b = 0 \\ \left(\lambda + 2\rho \right) \frac{K}{K'} a - \lambda \frac{K}{K'} \{ i a + 2\rho b \} = 0 \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\rho a + p \left(\frac{k^2}{k'^2} b + b \right) = 0 \\ -ik \lambda \frac{a}{k} + (\lambda + 2\rho) \frac{k}{ik} a + 2\rho \frac{ik}{k'} b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\rho k'^2 a + p(k^2 + k'^2) b = 0 \\ \{(\lambda + 2\rho)k^2 k' - \lambda k'^2 k\} a + 2\rho k^2 k b = 0 \end{array} \right.$$

$$4\rho^2 k^2 k k'^2 - p(k^2 + k'^2)((\lambda + 2\rho)k^2 - \lambda k'^2)k' = 0$$

$$(k^2 + k'^2)((\lambda + 2\rho)k^2 - \lambda k'^2) - 4\rho k^2 k k' = 0 \quad \underline{\text{OK}}.$$

En remplaçant $\lambda + 2\rho$ par eV_p^2 , p par eV_s^2 , k et k' par
leur valeurs sur la 1^{ère} ligne qui donne $k(\omega)$.

Géophysique

Examen de mars 2013, 3 h - documents et calculatrices interdits

32,5
M1 physique, ENS Lyon

Note après correc' : il y en a qui ont vraiment pas dans celle année.
Il y en a un qui écrit $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dq}{dz} + qA$ et $q = -k \frac{\partial T}{\partial z}$!
Un autre : "Q(wt) est une onde plane"

6

1 Structure de la Terre

- 3 1. Expliquer les grands traits de la structure de la Terre (une page maximum).
- 3 2. Expliquer les grands traits de la structure de la lithosphère océanique (une page maximum).

13,5

2 Transfert de chaleur dans la lithosphère continentale

Le flux de chaleur est mesuré à la surface des continents et montre des variations latérales importantes. En l'absence de mouvement de convection au sein même de la lithosphère continentale, ces variations latérales peuvent être attribuées à des variations de la production radioactive et aux variations du flux de chaleur provenant du manteau convectif. L'objectif de cet examen est d'étudier ce problème et de montrer qu'il est possible de séparer les différentes sources de variations du flux de chaleur à la surface.

2.1 Généralités

On considère la lithosphère continentale comme un milieu bi-dimensionnel, infini dans la direction horizontale et d'épaisseur D . La température de surface est prise comme nulle et le flux (vertical) de chaleur en surface égal à $q(x)$ latéralement variable dont la moyenne horizontale est \bar{q} . De la chaleur est produite par radioactivité avec un taux par unité de masse noté $A(x, z)$, dépendant de la position. x est la position horizontale et z est la profondeur.

- o,5 1. Faire un schéma synthétique du problème en faisant apparaître tous ses ingrédients.
- o,5 2. Justifier que le flux de chaleur est vertical en surface.
- 1 3. Écrire l'équation générale de diffusion de la chaleur que doit satisfaire la température. En notant $h = A/C_p$ et en supposant la conductivité thermique constante, se ramener à l'équation la plus simple possible.
- o,5 4. Exprimer mathématiquement les conditions à satisfaire en $z = 0$.

est de l'ordre de 40 mWm^{-2} . La conductivité vaut $k = 3 \text{ W/m/K}$. On pourra utiliser $\cosh(3,8) = \sinh(3,8) = 22$; $\cosh(0,6) = 1,2$; $\sinh(0,6) = 0,6$.

- 1 1. En supposant que ces variations du flux de chaleur proviennent uniquement du manteau convectif, à une profondeur $D = 300 \text{ km}$, quelle est l'amplitude des variations de flux que l'on en déduit à cette profondeur ?
- 1 2. Quelles sont les variations latérales de température qui correspondent ? Est-ce raisonnable et qu'en déduire ?

(13)

3 Ondes de Rayleigh

On cherche à établir l'existence d'ondes de surface de Rayleigh en déterminant des solutions de l'équation d'onde dans une Terre plate (demi-espace infini homogène). On note Oz la direction verticale, et $z = 0$ le sol.

On rappelle que $\operatorname{div} \vec{\text{rot}} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} = 0$. On suppose (théorème de décomposition de Helmholtz) qu'on peut décomposer un champ de vecteur \vec{u} de façon unique en

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{u}_p = \vec{\text{rot}} \vec{\psi}, & \vec{\psi} \\ \vec{u}_s = \vec{\text{grad}} \varphi, & \varphi \end{cases} \quad \operatorname{div} \vec{\psi} = 0. \quad (3)$$

On admettra aussi : $\operatorname{div} \vec{u}_s = \vec{\text{rot}} \vec{u}_s = 0$

+ simple ; voir partie 2009
éla corrélation

$$(\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{u} = 0) \Leftrightarrow \vec{u} = 0. \quad (4)$$

- 3 1. On rappelle que $\rho \partial_t^2 u_j = \partial_i \sigma_{ij}$ et $\sigma_{ij} = \lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Que représentent ces deux relations ? En déduire l'équation de Navier-Stokes contrôlant \vec{u} . Montrer que \vec{u}_s , \vec{u}_p , φ et $\vec{\psi}$ vérifient l'équation d'onde. Que représentent ces solutions ?
- 1 2. Prenons une solution de la forme $\vec{u}_p = \vec{U}(z)e^{i(\omega t - kx)}$; montrer que \vec{U} est de la forme $\vec{U} = \vec{A} e^{\kappa z} e^{i(\omega t - kx)}$ avec \vec{A} constant. On prendra dans la suite κ réel, pourquoi ? Qu'implique $\operatorname{rot} \vec{u}_p = 0$? $\vec{A}_y \Rightarrow \kappa A_x - \kappa A_x + k A_y = 0$
- 1,5 3. Calculer les contraintes verticales correspondantes en surface, σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} , en fonction de \vec{U} . \vec{A} ? $\vec{A} \propto \vec{A}_0$
- 1,5 4. Idem pour \vec{u}_s : quelle est sa forme, calculer les contraintes en surface. Qu'implique $\operatorname{div} \vec{u}_s = 0$?
- 2 5. Appliquer les conditions aux limites (on pourra commencer par σ_{yz}) au déplacement total $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$.
- 1 6. En déduire que le mouvement se fait dans un plan ; en déduire également la relation qui lie k à ω . deuxième (on ne demande pas de donner cette relation).
- 1 7. La solution est environ $\omega/k = 0,9V_S$. Commentaires.