Magistère des sciences de la Terre, Première année, ENS-Lyon. Examen sans documents. Durée approximative : 1h.

1 Équation de Navier

A partir de l'équation de conservation de l'impulsion et de la loi de Hooke (ou de Lamé), démontrez l'équation de Navier :

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{u} + \mu\Delta\vec{u}.$$

Quelles hypothèses utilisez-vous ?

2 Ondes sphériques

Soit $\vec{r}$ le rayon vecteur d'un point de l'espace par rapport à l'origine et $r = ||\vec{r}||$ son module ; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, k et ω sont deux scalaires constants. A quelle condition le potentiel $\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r}f(kr - \omega t)$ est-il solution de l'équation :

$$c^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \ ?$$

On rappelle que si une fonction h est à symétrie sphérique alors :

$$\Delta h = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r h)$$

où ∂_r désigne la dérivée partielle par rapport à r. En quoi φ représente-t-elle une onde, dans quelle direction se propage-t-elle, et à quelle vitesse ?

3 Coefficients de transmission

Soit une onde incidente SH sur une interface horizontale entre deux milieux solides élastiques. Quels types d'ondes génère-t-elle à la suite de son arrivée sur l'interface et pourquoi ?

Si l'onde est plane harmonique, les amplitudes des déplacements correspondant s'écrivent :

$u_i = Ue^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{x}-\omega t)}$ pour l'onde SH incidente,

$u_r = RUe^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{x}-\omega t)}$ pour l'onde SH refléchie,

$u_t = T\,Ue^{i(\vec{k}_t\cdot\vec{x}-\omega t)}$ pour l'onde SH transmise.

Q'implique la continuité du déplacement? Calculez la contrainte normale (ou vecteur traction) généré par l'onde incidente sur l'interface. A partir de la continuité du vecteur traction, donner une relation entre R et T. On notera :

$$C = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\frac{c_1}{c_2},$$

où μ est le module de cisaillement, α l'angle des rais avec la normale, c la vitesse des ondes, et où les indices 1 et 2 désignent respectivement les paramètres du milieu incident et du milieu de transmission. Donnez enfin les coefficients de réflexion et de transmission R et T en fonction de C.

4 Potentiels

Soit une décomposition de u sous la forme :

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \vec{u}_S = \vec{\mathrm{grad}}\varphi + \vec{\mathrm{Rot}}\vec{\psi}$$

avec φ un champ scalaire et $\vec{\psi}$ un champ vectoriel. Montrez que φ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_1^2\Delta\varphi + f(t)$$

où φ une fonction scalaire quelconque du temps. On rappelle que $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{\mathrm{grad}} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{Rot}} = 0$, $\Delta = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{grad}}$ et $\vec{\Delta} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{\mathrm{Rot}}$. On donne aussi :

$$\forall\vec{v} \quad \{\mathrm{div}\vec{v} = 0 \,\mathrm{et}\, \mathrm{Rot}\vec{v} = 0\} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \mathit{constante}.$$

Déterminez c_1 en fonction de λ, φ et ρ. Pourquoi est-ce que φ peut être choisie à une fonction du temps près? En déduire que l'on peut-on choisir la « constante » f identiquement nulle.