Corrigé

1 Équation de Navier

cf. cours

2 Ondes sphériques

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f'' \omega^2 / r$$

$$\Delta \varphi = f'' k^2 / r$$

donc $k^2 c^2 = \omega^2$.

En $t + \mathrm{d}t$ le même déplacement est en $r + \mathrm{d}r$ avec $\mathrm{d}r = c\,\mathrm{d}t$. C'est dons une onde qui se propage suivant la direction radiale à la vitesse c dans le sens du centre ou vers l'anti-centre.

3 Coefficients de transmission

Elle génère des ondes SH car seules des ondes SH peuvent satifaire la continuité du déplacement à l'interface.

Continuité du déplacement : $1 + R = T$ et $k_i|_2 = k_r|_2 = k_t|_2 = |k| \sin \alpha = \omega \sin \alpha / c$ (cf. cours).

Pour la continuité du vecteur traction il faut calculer les contraintes avec :

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

car pour une onde S, $\mathrm{div} u = 0$. Si on choisit u suivant x_3 et la normale suivant x_1 :

$$\sigma_{11} = 2\mu \partial_1 u_1 = 0$$

$$\sigma_{12} = \mu(\partial_1 u_2 + \partial 2 u_1) = 0$$

$$\sigma_{13} = \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) = i\mu k|_1 U$$

Donc $\mu_1(k_i|_1 U + k_r|_1 RU) = \mu_2 k_t|_1 TU$. Or $\omega \cos \alpha / c = k|_1$ donc $\mu_1 \cos \alpha_1 (1 - R)/c_1 = \mu_2 cos \alpha_2 T / c_2$ c'est-à-dire $1 + R = CT$. Finalement :

$$T = \frac{2}{1 + C} \qquad S = \frac{1 - C}{1 + C}.$$

4 Potentiels

D'après le cours :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_P}{\partial t^2} = c_1^2 \vec{\Delta} \vec{u}_P \qquad \frac{\partial^2 \vec{u}_S}{\partial t^2} = c_2^2 \vec{\Delta} \vec{u}_S$$

avec $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. En remplaçant :

$$\vec{\mathrm{grad}} \frac{\partial^2 \vec{u}_P}{\partial t^2} = c_1^2 \vec{\Delta} \vec{\mathrm{grad}} \varphi = c_1^2 \vec{\mathrm{grad}} (\mathrm{div} \vec{\mathrm{grad}} \varphi) =$$

$$\vec{\mathrm{Rot}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \vec{\Delta} \vec{\mathrm{Rot}} \vec{\psi} = -c_2^2 \vec{\mathrm{Rot}} \vec{\mathrm{Rot}} \vec{\mathrm{Rot}} \vec{\psi} = c_2^2 \vec{\mathrm{Rot}} (\vec{\Delta} \vec{\psi})$$

Ces deux équations s'écrivent $\vec{\mathrm{grad}} x = 0$ et $\vec{\mathrm{Rot}} \vec{y} = 0$. Donc x est nulle à une constante (dépendant du temps) près, et $\vec{y} = 0$ est nul à un vecteur irrotationel près. On peut prendre ces constates nulles car une solution $\varphi + cste$,$\vec{\psi}$+vect-irrotationnel génère le même déplacement que φ,$\vec{\psi}$ (puisque grad$cste = 0$et Rot vect-irrotationnel=0).