Mathématiques
Examen de janvier 2004

Master de sciences de la Terre, M1, mise à niveau, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 2 pages. Durée : 2h. Les questions sont indépendantes.

Calculatrices interdites.

— o —

1. Calculer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Cette matrice est-elle inversible ?

2. Calcul du laplacien en symétrie circulaire : En deux dimensions le laplacien d'une fonction $f(x, y)$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Soient r et θ les coordonnées polaires. Représenter (x, y) et (r, θ) sur un schéma puis exprimer x et y en fonction de r et θ. Exprimer r et θ en fonction de x et y. On considère maintenant une fonction f qui ne dépend que de r et pas de θ. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f^2}{\partial r^2}$. En déduire l'expression du laplacien en symétrie circulaire en fonction des dérivées par rapport au rayon.

3. En effectuant des développements limités, trouver la limite quand x tend vers 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{x\sqrt{1+x} - \sin x}{\ln(1+x) - x}. \tag{3}$$

Toujours par un développement limité, donner une approximation au premier ordre de $\sqrt{1,06}$. De même, montrer qu'une bonne approximation de $\sqrt{10}$ est $3 + \frac{1}{6}$.

4. Soient x, y les coordonnées cartésiennes du plan, et E la surface elliptique définie par $E = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $0 < b < a$.

a) Représenter E.

b) Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \; dt$.

c) Calculer l'aire de E par intégration en coordonnées cartésiennes. On pourra poser $x = a \sin t$.

5. En effectuant le changement de variable $t^2 = x + 1$, calculer

$$\int_0^X \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec } X > 0. \tag{4}$$

6. On veut trouver les solutions générales de l'équation :

$$x^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Pour résoudre (5), on fait le changement de variables suivant : $u = xy$ et $v = y/x$.

Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de f par rapport à x et y, $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ en fonction des dérivées par rapport à u et v. En déduire les solutions de l'équation (5) en fonction des variables u et v, puis de x et y (résultat : $f(x,y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$).

— Fin —