Mathématiques

Examen de janvier 2004

Licence de sciences de la Terre, L3, mise à niveau, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 2 pages. Durée : 2h. Les questions sont indépendantes.

Calculatrices interdites.

— o —

1. Calculer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Cette matrice est-elle inversible ?

2. Soit une fonction $f(x,y)$ vérifiant l'équation différentielle

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Quelle est la signification géométrique de r et θ ? Calculer $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire les solutions de l'équation différentielle en fonction de r, θ puis de x, y.

3. En effectuant des développements limités trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - \cos(1/x)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}. \tag{3}$$

4. Soient x, y les coordonnées cartésiennes du plan, et D le domaine défini par $D = \left\{(x,y) \,|\, x, y \geq 0; x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ et } y \geq -x + 1\right\}$ avec $R = 2$.

a) Représenter D.

b) Calculer l'aire de D par intégration en coordonnées cartésiennes.

c) Retrouver ce résultat par une méthode géométrique simple.

5. En effectuant le changement de variable $e^x = u^2 + 1$, calculer

$$\int_0^a \sqrt{e^x - 1}\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

6. On veut trouver les solutions générales de l'équation d'ondes, dite aussi de d'Alembert, dont l'expression à une dimension est :

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \tag{5}$$

1. A partir de (**??**), donner la dimension de c.
2. Pour résoudre (**??**), on fait le changement de variables suivant : $u = x - ct$ et $v = x + ct$.
   - Donner la signification de u et v.
   - Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de f par rapport à x et t $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial f}{\partial t} \text{ et } \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)$ en fonction des dérivées par rapport à u et v.
3. En déduire les solutions de l'équation d'ondes en fonction des variables u et v, puis de x et t.

— Fin —