Mathématiques

Examen de janvier 2003

Examen avec documents. Calculatrice interdite. 1 page. Durée : 2h.
Les questions sont indépendantes.

— o —

<u>Préambule</u> : soignez votre expression, votre orthographe et veillez à la précision de vos réponses.

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? (*<u>Aide</u> :* les racines du polynôme caractéristique sont simples).

2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.

3. Soit une fonction $f(x,y)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

1. Quelle est la signification de r et θ ? (un schéma peut être utile)
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (1) en fonction de r, θ puis de x, y.

4. Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{(\mathrm{e}^{x^2}-1)(\sqrt{2x+2})}{x\ln(1+2x)}$$

Calculer la limite de f en 0. (*<u>Aide</u> :* utiliser les développements limités).

5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définis par : $\vec{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. A quelles conditions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

6. Linéariser $\sin^3 x$ à l'aide des formules d'Euler.

7. Équation de la chaleur à une dimension :

On veut déterminer le champ de température $\theta(x,t)$ dans un cylindre conducteur de longueur l en fonction du temps t et de la position x (cf. fig.1). A l'instant initial $t=0$, ses extrémités sont mises en contact avec deux sources thermiques imposant $\theta(0,0)=\theta(l,0)=0$. On suppose aussi que la répartition initiale de température est de la forme : $\theta(x,0)=\theta_1 \sin(\frac{\pi x}{l})$.

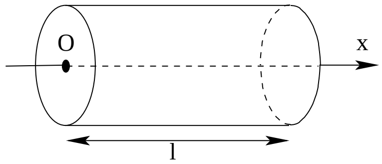

FIG. 1 – Géométrie du problème de diffusion

L'équation de la chaleur régissant la température s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad \text{où } D \text{ est une constante positive.} \tag{2}$$

On cherche $\theta(x,t)$ sous la forme $\theta(x,t)=f(x)g(t)$ (séparation des variables).

1. Quelle est la dimension de D ?
2. Que devient (2) dans ces conditions ? Justifier alors que $\frac{g'}{g}=C_1$ et $\frac{f''}{f}=C_2$, où $C_1<0$ et C_2 sont des constantes. Déterminer la forme des solutions réalistes de (2).
3. En utilisant les conditions initiales, déterminer les constantes d'intégration en fonction des données du problème.

— Fin —