Mathématiques
Examen de janvier 2002

Magistère de sciences de la Terre, remise à niveau, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 1 page. Durée : 2h. Les questions sont indépendantes.

— o —

1. Calculer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Soit une fonction $f(x, y)$ vérifiant l'équation différentielle [1]

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Quelle est la signification de r et θ ? Calculer $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire les solutions de l'équation différentielle en fonction de r, θ puis de x, y.

3. En faisant des développements limités trouver la limite quand x tend vers 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{(\sqrt{1 + 2x} - 1)\,(e^x - 1)}. \tag{3}$$

4. Soient x, y les coordonnées cartésiennes du plan, H, R_0, R trois constantes, et l'intégrale

$$I = \iint_D \left(\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - H\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4}$$

où D est le domaine d'intégration $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < R_0^2\}$. Représenter D. Soit le changement de variable $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Montrer que le Jacobien de ce changement de variable vaut $J = r$. En déduire que

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0}\left(\sqrt{R^2 - r^2} - H\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

puis déterminer I en fonction de R et H sachant que $H^2 + R_0^2 = R^2$.

5. Soient $(x_i, y_i)_{i=1,n}$ n couples de valeurs et

$$E = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2. \tag{6}$$

Calculer $\frac{\partial E}{\partial a}$ et $\frac{\partial E}{\partial b}$. En déduire a et b si ces dérivées partielles sont nulles.

[1] L'équation $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ figurant dans le sujet distribué comportait une erreur de frappe, désolé.

6. Calculer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

7. On veut trouver les solutions générales de l'équation d'ondes, équation dite de d'Alembert, dont l'expression à une dimension est :

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \tag{8}$$

1. A partir de (8), donner la dimension de c.
2. Pour résoudre (8), on fait le changement de variables suivant : $u = x - ct$ et $v = x + ct$.
   - Donner la signification de u et v.
   - Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de f par rapport à x et t $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)$ en fonction des dérivées par rapport à u et v.
3. En déduire les solutions de l'équation d'ondes en fonction des variables u et v, puis de x et t.

— Fin —