Mathématiques
Examen du mardi 30 janvier 2001

Magistère de sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 1 page. Durée : 1h. Les questions sont indépendantes.

— o —

1. Calculer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Soit une fonction $f(x, y)$ vérifiant l'équation différentielle

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Quelle est la signification de r et θ ? Calculer $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire les solutions de l'équation différentielle en fonction de r, θ puis de x, y.

3. En faisant des développements limités trouver la limite quand x tend vers 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{(\sqrt{1+4x} - 1)\ln(1+x)}. \tag{3}$$

4. Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y. \tag{4}$$

Soit le changement de variable $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Montrer que le Jacobien de ce changement de variable vaut $J = r$. En déduire que

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \tag{5}$$

puis que $I = \frac{\pi}{4}$.

5. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes en 3 dimensions et soit le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculer le vecteur

$$g = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right). \tag{6}$$

Calculer la norme de g. Représenter g dans l'espace.

— Fin —