TD statistiques. 15/1/99

Exercice 1

On mesure des distances avec un appareil laser. Pour des mesures de l'ordre du mètre, le constructeur estime que l'erreur de mesure est normalement distribuée, avec une moyenne nulle et un écart-type de 3mm.

1. Combien faut-il au minimum effectuer de mesures pour obtenir une longueur moyenne qui diffère de moins de 1.4mm de la mesure réelle, avec un taux de confiance de 95%?

2. Un étudiant peu scrupuleux n'effectue que 10 mesures, et oublie de noter l'écart-type indiqué par le constructeur. Par contre, il se souvient que l'erreur suit une distribution gaussienne. Il estime la variance de la mesure de la manière suivante:

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 22.9mm^2$$

Donnez un majorant de $\left|\overline{X} - \mu\right|$ avec un taux de confiance de 95%.

3. A partir de l'estimation $\widehat{\sigma^2}$ de σ^2, l'étudiant détermine les intervalles de confiance à 95 et 99% de σ.
Calculez les bornes de ces intervalles, et concluez, sachant que σ vaut 3mm.

Exercice 2

Soit un échantillon IID de n variables aléatoires $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Soient:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \widehat{\sigma^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2,\end{aligned}$$

respectivement estimateurs de la moyenne et de la variance de la loi de distribution suivie par cet échantillon.

1. Calculer le biais de chacun des ces deux estimateurs.

2. Montrer qu'ils sont convergents.
Rq:

$$Var(\widehat{\sigma^2}) = 2\sigma^4\frac{n-1}{n^2}$$