TD probabilités. 2/12/98

Marches aléatoires

Soit une grenouille se déplaçant par sauts successifs à l'intérieur d'un tuyau. On supose que chaque saut $X_i$est une variable aléatoire statistiquement indépendante des autres, et que tous les X_i suivent la même loi de probabilité, de moyenne nulle et de variance σ^2.

1. Exprimer la moyenne et la variance du déplacement total après N sauts.

2. On va chercher à exprimer la loi de probabilité qui régit le déplacement total.

a/ On pose:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sigma\sqrt{N}}.$$

Exprimer la fonction génératrice g_Z en fonction de g_{X_i}

b/ A l'aide d'un développement de Taylor trouver la limite de g_Z quand $N \to +\infty$.

On rappelle que:

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x.$$

En déduire la loi limite de la variable aéatoire Z.

c/ Soit τ l'intervalle de temps entre deux sauts. Donner une bonne approximation de la densité de probabilité f_X de la loi de la variable aléatoire $X(t)$ (*ie* déplacement total à la date t) pour $t >> \tau$.

3. Montrer que f_X est solution de l'équation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

en précisant l'expression de D.

Quel est le phénomène physique décrit par cette équation?

4. Que ce passe-t-il si la moyenne de la loi de probabilité des X_i vaut $l \neq 0$? Exprimer la nouvelle densité de probabilité h_X (on posera $w_i = x_i - l$). Que devient l'équation précédente? Commenter les résultats