Examen de mathématiques
mars 2024
L3 Géosciences, ENS de Lyon.
Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30
— o —

1 Modes propres sismiques de la Terre

On note L_2 l'opérateur horizontal :

$$L_2 h = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^2}\,.$$

1. Montrer que l'harmonique sphérique $Y_2^1(\theta,\phi) = \sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$ satisfait

$$L_2 Y_2^1 = a Y_2^1$$

avec a une valeur à déterminer.

2. La pression P dans une sphère liquide de rayon r_0 soumise à des oscillations élastiques est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 P \tag{1}$$

où c est la vitesse des ondes sismiques (dans un liquide). La condition limite est celle d'une pression nulle en surface : $P(r_0,\theta,\phi,t) = 0$. Nous cherchons une solution sous la forme

$$P(r,\theta,\phi,t) = R(r)Y_2^1(\theta,\Phi)e^{i\omega t} \tag{2}$$

avec ω la pulsation de cette onde stationnaire (ou mode propre). En utilisant la question précédente et l'expression du laplacien en géométrie sphérique donnée plus bas, montrer que la fonction radiale satisfait l'équation suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rR) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{6}{r^2}\right)R = 0. \tag{3}$$

Quelle condition limite doit satisfaire la fonction R ?

3. Vérifier que la fonction

$$R(r) = \left(\frac{3c^3}{\omega^3 r^3} - \frac{c}{\omega r}\right)\sin\frac{\omega r}{c} - \frac{3c^2}{\omega^2 r^2}\cos\frac{\omega r}{c} \tag{4}$$

est solution de l'équation (3).

4. On appelle *mode propre* cette solution et on note ω_n l'ensemble des pulsations correspondantes. En appliquant la condition limite en $r = r_0$, écrire l'équation que doivent satisfaire les pulsations propres ω_n en fonction de c et r_0.
5. En vous aidant de la figure 1, justifier l'approximation $\omega_n \approx (n+1)\pi c/r_0$ pour les grandes valeurs de n.
6. Les mesures des modes propres de la Terre après les grands séismes nous donnent par exemple les valeurs suivantes : $\omega_4 = 10.8\,\mathrm{mHz}$; $\omega_8 = 20.2\,\mathrm{mHz}$. Sachant que le rayon de la Terre est $r_0 = 6371\,\mathrm{km}$, en déduire la vitesse des ondes sismiques dans la Terre et commenter.

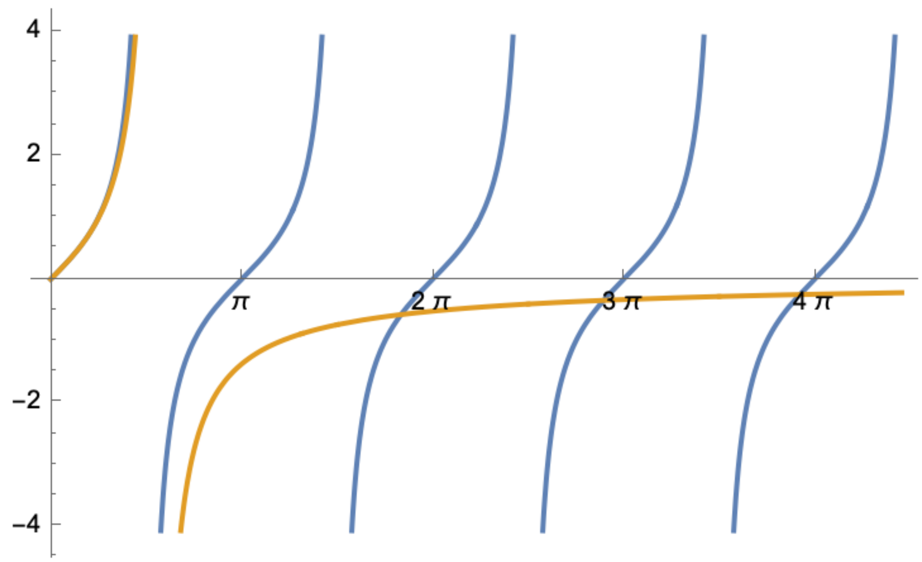

FIGURE 1 – Représentation graphique des fonctions $\tan(x)$, en bleu, et $x/(1-x^2/3)$, en orange.

Formulaire

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$2\cos a \cos b = \big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$2\sin a \sin b = \big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$2\sin a \cos b = \big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

Laplacien en géométrie sphérique

$$\nabla^2 h = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rh) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^2}$$

2 Opérateurs et tenseurs

a. Formule de Lamb

Par la méthode de votre choix, démontrer la formule de Lamb, utile en mécanique des fluides :

$$(\vec{u}\cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}(u^2/2) + (\vec{\mathrm{rot}}\vec{u}) \wedge \vec{u},$$

où le terme de gauche signifie $((\vec{u}\cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{u})_i = u_j \partial_j u_i$. On rappelle que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$.

b. Divergence en cylindriques

Soit la relation

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{V}\int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S.$$

Expliquer les notations de cette relation en faisant un schéma. Représenter un élément de volume cylindrique et indiquer les longueurs de toutes ses faces. Déterminer $\mathrm{div}\,\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

c. Ondes sonores

Un fluide parfait subit une fluctuation de pression, qu'on note p, lorsqu'il possède une vitesse, qu'on note $\vec{v}$. L'équation de la dynamique de ce fluide, de densité homogène ρ, s'écrit alors :

$$\rho\partial_t\vec{v} = -\vec{\mathrm{grad}}p.$$

Si la fluctuation de pression est due à un changement de volume isentrope, elle vérifie

$$\partial_t p = -\frac{1}{\chi}\,\mathrm{div}\vec{v}$$

où χ est la compressibilité isentrope du fluide, qu'on supposera invariable et homogène.

En déduire que la pression vérifie l'équation des ondes. Donner l'expression de la vitesse du son en fonction des données du problème. Aux conditions ambiantes, les compressibilités de l'air et de l'eau sont respectivement de $0,7\times 10^{-5}$ Pa^{-1} et $4,6\times 10^{-10}$ Pa^{-1}. Leurs masses volumiques sont de 1,292 kg/m^3 et 1000 kg/m^3. En déduire les vitesses du son dans l'air et l'eau.

d. Chaleur en milieu anisotrope

- Dans un matériau anisotrope de température $T(x_1, x_2, x_3)$, la densité de flux de chaleur $\vec{q}$ obéit à la loi de Fourier :

$$q_i = -k_{ij}\,\partial_j T.$$

Décrire k en une ligne.

- En régime permanent dans un solide, $\mathrm{div}\,\vec{q} = 0$. En supposant k homogène, déterminer l'équation régissant T dans le milieu.

- Déterminer l'expression de cette équation dans le système d'axes principaux de k (k est supposé symétrique).

- Par des changements de variables sur les x_i, la mettre sous la forme $\Delta T = 0$.

— o —