Examen de mathématiques
17 mars 2023
L3 Géosciences, ENS de Lyon.
Documents autorisés : aucun. Durée 1h30
— o —

1 Intégrales

1. Question de cours : écrire le théorème de transport de Reynolds pour la variation d'une quantité $f(x, y, z, t)$ intégrée sur un volume V dont la surface ∂V se déplace à la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$.

   Calculer les intégrales suivantes :
2. $$\int_V \frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \text{ avec } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, h] | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
3. $$\int\int\int_{0\leq x\leq y\leq z\leq 1} x^2 z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$
4. $$\int\int_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} \text{ avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2 Équations de la physique

On note L_2 l'opérateur horizontal :

$$L_2 f = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

1. Montrer que l'harmonique sphérique $Y_2^2(\theta, \phi) = \sin^2\theta e^{2i\phi}$ satisfait

   $$L_2 Y_2^2 = a Y_2^2$$

   avec a une valeur à déterminer.
2. On cherche maintenant à résoudre l'équation de Laplace $\nabla^2 T = 0$ dans une sphère de rayon R soumise à la condition limite en surface $T(r = R, \theta, \phi) = T_0 Y_2^2(\theta, \phi)$. On cherche une solution de la forme $T = T_0 f(r) g(\theta, \phi)$. Proposer un choix pour la fonction $g(\theta, \phi)$ et le justifier.
3. Écrire l'équation satisfaite par $f(r)$ et ses conditions limites.
4. Résoudre le problème et écrire l'expression complète pour T.
5. Quelle est la solution si la température de surface est $T_0 Y_l^m(\theta, \phi)$ pour d'autres valeurs de $l \neq 0, m$? Qu'en déduire pour la pénétration vers la profondeur d'anomalies latérales imposées à la surface ?

Formulaire, Laplacien en géométrie sphérique :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

3 Opérateurs et tenseurs

a. Formule de Lamb

Par la méthode de votre choix, démontrer la formule de Lamb, utile en mécanique des fluides :

$$(\vec{u}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}(u^2/2) + (\vec{\mathrm{rot}}\vec{u})\wedge\vec{u},$$

où le terme de gauche signifie $((\vec{u}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{u})_i = u_j\partial_j u_i$. On rappelle que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$.

b. Rotationnel en cylindriques

Soit la relation

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}\cdot\vec{n} = \frac{1}{S}\int_{\partial S}\vec{v}\cdot\ \vec{\mathrm{d}\ell}.$$

Expliquer les notations de cette relation en faisant un schéma. Après avoir choisi correctement S, déterminer la composante du rotationnel suivant l'axe z en coordonnées cylindriques.

c. Ondes en eau peu profonde

Dans l'approximation de l'océan peu profond, on suppose que le mouvement d'une colonne verticale d'océan est uniforme. On décrit alors ce mouvement par sa vitesse horizontale $\vec{v} = (v_x, v_y)$ et sa hauteur $H + h(x,t)$ où H est la profondeur au repos, supposée uniforme, et h est sa part variable dûe au mouvement et telle que $h \ll H$. Les opérateurs $\vec{\mathrm{grad}}$ et div désignent ici le gradient et la divergence dans les deux dimensions horizontales.

Pour un océan homogène et incompressible, on peut montrer que les équations du mouvement (sans force de Coriolis) sont :

$$\partial_t h = -H\,\mathrm{div}\vec{v},$$
$$\partial_t\vec{v} = -g\,\vec{\mathrm{grad}}h,$$

où g désigne la pesanteur supposée homogène.

- Montrer que ces deux relations peuvent se combiner pour donner une équation d'onde. Note : il s'agit de l'*équation d'onde (ou de la houle) en eau peu profonde.*

- Quelle est la vitesse de cette onde en fonction des paramètres du problème ?

- Calculer numériquement cette vitesse en prenant une profondeur d'océan de 4000 m.

d. Chaleur en milieu anisotrope

- Dans un matériau anisotrope de température $T(x_1, x_2, x_3)$, la densité de flux de chaleur $\vec{q}$ obéit à la loi de Fourier :

$$q_i = -k_{ij}\,\partial_j T.$$

Décrire k en une ligne.

- En régime permanent dans un solide, $\mathrm{div}\,\vec{q} = 0$. En supposant k homogène, déterminer l'équation régissant T dans le milieu.

- Déterminer l'expression de cette équation dans le système d'axes principaux de k (k est supposé symétrique).

- Par des changements de variables sur les x_i, la mettre sous la forme $\Delta T = 0$.

— o —