Mathématiques - Probabilités et statistiques
Examen du jeudi 4 février 1999

Magistère des sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen sans documents. 3 pages. Durée conseillée : 2 h00.

— o —

Problème
sur le rapport de deux variables aléatoires suivant des lois de Rayleigh

On dit qu'une v.a. (variable aléatoire) X suit une loi de Rayleigh de paramètre σ si sa d.d.p. (densité de probabilité) est donnée par :

$$f_X(x) = \mathrm{C}x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) H(x). \tag{1}$$

où C est une constante et H est la fonction *Heaviside* définie apr :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

On fait un tirage numérique aléatoire de 10000 couples de nombres $(d_i, t_i)_{i=1,10000}$, les d_i suivant une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma_d = 2$ et les t_i suivant une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma_t = 1$ (on n'utilisera pas ces valeurs numériques avant la partie III). Divers résultats concernant ce tirage numérique sont présentés dans les figures de la dernière page. Le but du problème est de comprendre ces résultats numériques. On cherche notamment à décrire ce qui se passe statistiquement quand on effectue l'opération $v = d/t$.

Chacune des trois parties peut être traitée indépendemment pourvu que l'on utilise les résultats donnés dans les parties précédentes.

I. Loi de Rayleigh

1. Montrer que $\mathrm{C} = 1/\sigma^2$.

2. Dessinez la courbe $(x, f_X(x))$. Montrer que le maximum est atteint en $x_{\max} = \sigma$.

3. Montrer que la moyenne vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ (on pourra reconnaître l'écart-type d'une gaussienne).

4. Calculer l'écart-type de X. On pourra commencer par montrer, en intégrant par parties, que :

$$I = \int_0^{+\infty} y^3 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \,\mathrm{d}y = 2. \tag{3}$$

5. Quelle est l'espérance de $1/X$?

II. Rapport de deux lois de Rayleigh

On va chercher la loi et les caractéristiques d'une v.a. définie comme le rapport de deux v.a. indépendantes suivant chacune une loi de Rayleigh. Soient donc D et T deux v.a., que l'on pourra nommer *distance* et *temps*, qui suivent des lois de Rayleigh :

$$f_D(d) = \frac{d}{\sigma_d^2} \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_d^2}\right) H(d), \tag{4}$$

$$f_T(t) = \frac{t}{\sigma_t^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right) H(t). \tag{5}$$

On définit la variable aléatoire *vitesse* par :

$$V = \frac{D}{T}. \tag{6}$$

6. Montrer que l'espérance de V vaut $\mathcal{E}(V) = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma_d}{\sigma_t}$.

7. Montrer que la loi suivie par V s'écrit :

$$f_V(v) = \frac{2\sigma_t^2\sigma_d^2 v}{(\sigma_d^2 + \sigma_t^2 v^2)^2} H(v). \tag{7}$$

On rappelle que si D et T sont indépendantes alors leur rapport suit la loi :

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) f_D(tv)|t| \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

8. Montrer que le maximum de cette loi est atteint en $v_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_d}{\sigma_t}$.

9. Soit Z la v.a. définie par le changement de variable $Z = \ln\left(\frac{V}{v_0}\right)$ où $v_0 = \frac{\sigma_d}{\sigma_t}$ est une constante. Montrer que la loi suivie par Z est :

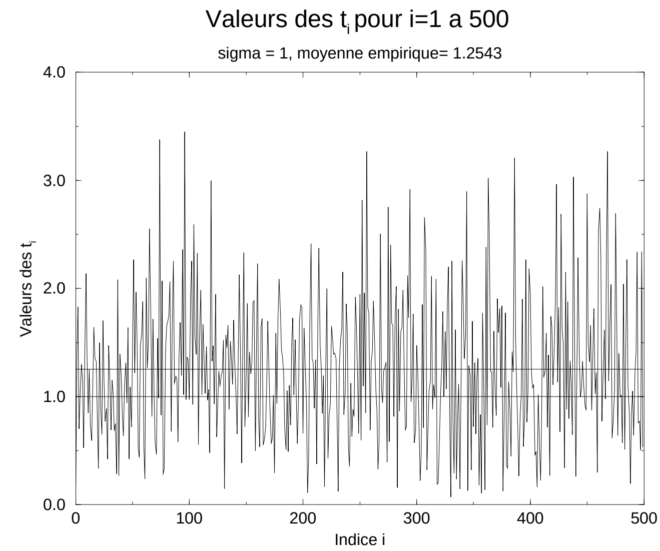
$$f_Z(z) = \frac{2}{(e^z + e^{-z})^2}. \tag{9}$$

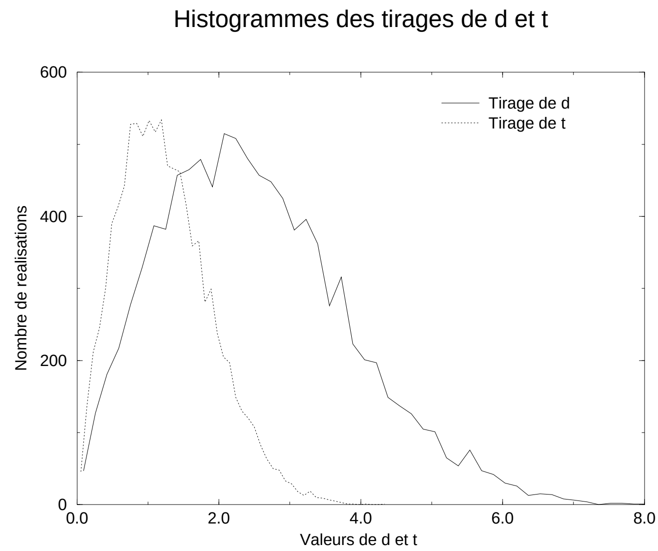
10. Dessiner cette loi. Quel est son maximum, sa moyenne? En déduire que $\exp(\mathcal{E}(\ln(V))) = \exp((\ln(V))_{\max}) = v_0$, où $_{\max}$ désigne le maximum.

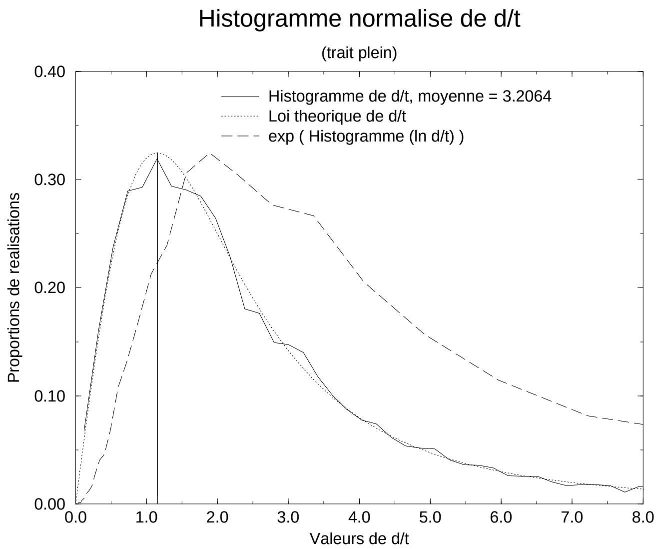
III. Test numérique

11. Sachant que l'on dispose d'un générateur de nombres aléatoires suivant une loi uniforme, comment génère-t-on des nombres aléatoires suivant une loi de Rayleigh?

12. Les courbes de la page suivante représentent des tirages aléatoire de d et t, ainsi que leurs histogrammes. On a également calculé les logarithmes de d/t. Commenter chacune de ces figures ainsi que les valeurs qui leur sont attachées (attention, cette réponse est assez longue, il faut rassembler les résultats obtenus dans les parties précédentes, les analyser, réfléchir et faire une synthèse).







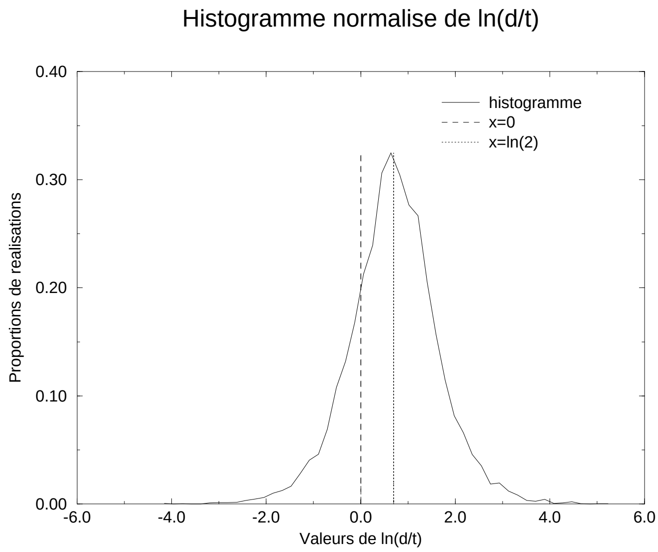


Figure 1 (haut, gauche) : représente (i, t_i) pour $i = 1, 500$, c'est-à-dire les 500 premières valeurs obtenues pour t par le tirage aléatoire.

Figure 2 (haut, droite) : Histogrammes correspondant de d_i et t_i, i=1,10000.

Figure 3 (bas, gauche) : Histogrammes de d_i/t_i (trait plein), loi théorique (f_V) de d/t (pointillés), exponentielle de l'histogramme du logarithme des d_i/t_i (longs tirets). Pour permettre une comparaison avec la courbe théorique, les histogrammes sont normalisés. Pour la même raison l'histogramme du logarithme des d_i/t_i (figure 4), a ici été ramené à un équivalent des d_i/t_i en prenant l'exponentielle de l'absisse de la figure 4.

Figure 4 (bas, droite) : Histogramme du logarithme des d_i/t_i.

— Fin —

Texte disponible à `http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`