Magistère des sciences de la Terre, Première année, ENSL. Jeudi 29 janvier 1998, examen sans documents. Durée approximative : 2h.

<u>Problème</u> : Détection d'un pic dans le spectre d'un signal bruité[1].

Les paragraphes 1) 2) 3) et 4) sont en grande partie indépendants.

1) Moindres carrés.

On considère un signal temporel $s(t)$ et sa transformée de Fourier $S(\nu)$:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-2i\pi\nu t)\ \mathrm{d}t \qquad (i^2 = -1). \tag{1}$$

On suppose que s est connue en des points régulièrement espacés $t_m = m(\Delta t)$, $m = 1, 2...N$ et on note $s_m = s(t_m)$. On veut déterminer $S(\nu)$ en des points régulièrement espacés $\nu_n = n(\Delta\nu)$, $n = 1, 2...N$ tels que $N(\Delta t)(\Delta\nu) = 1$.

Cela revient à chercher s_m sous la forme :

$$\hat{s}_m = \sum_{n=1}^{N} S_n \exp\left(2i\pi \frac{nm}{N}\right). \tag{2}$$

Pour cela on cherchera S_n tel que :

$$\epsilon = \sum_{m=1}^{N} |\hat{s}_m - s_m|^2 \quad \text{est minimum.}$$

La notation $|z|$ indique le module du complexe z : $|z|^2 = z\bar{z}$. Pour alléger l'écriture on notera $W = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$ et on remarquera que $\bar{W} = W^{-1}$.

a) Exprimez $\hat{s}_m$ en fonction de W et des S_n ; en déduire ϵ en fonction de W, ainsi que des S_n et $\bar{S}_n$.

b) Donnez les relations que S_n et $\bar{S}_n$ doivent vérifier pour que ϵ soit minimal. Pour cela, plutôt que considérer les parties réelles et imaginaires de S_n, on considérera S_n et $\bar{S}_n$ indépendamment et on effectuera les dérivations comme si ces quantités étaient réelles.

c) Montrez que :

$$\sum_{m=1}^{N} W^{m(n-n')} = N\delta_{nn'} \tag{3}$$

où $\delta_{nn'}$ est le symbole de Kronecker. On rappelle que pour tout $z \neq 1$:

$$\sum_{m=1}^{N} z^m = z\frac{1-z^N}{1-z}$$

1. Problème inspiré de l'article de Florsch *et al.*, 1995, PEPI n° 90.

d) En déduire que les S_n cherchés s'écrivent :

$$S_n = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} s_m \bar{W}^{nm} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} s_m \exp\left(-2i\pi\frac{nm}{N}\right) \tag{4}$$

2) Loi de l'amplitude spectrale.

On considère maintenant le cas d'un signal composé d'une partie non-aléatoire a et d'un bruit b, par définition aléatoire :

$$s(t) = a(t) + b(t).$$

On écrit :

$$\mathbb{S}(\nu) = \mathbb{A}(\nu) + \mathbb{B}(\nu)$$

la transformée de Fourier de cette relation. Celle-ci est calculée pratiquement par la relation (4). On veut déterminer la probabilité d'observer le signal non aléatoire en présence d'un bruit de plus ou moindre grande amplitude.

On notera A_r, B_r et A_i, B_i les parties réelles et imaginaires de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. $\mathbb{B}$ est considérée comme une variable aléatoire. On se placera à une fréquence ν fixée et on n'écrira plus ν afin d'alléger l'écriture. On notera par ailleurs de la même façon les v.a. et les valeurs qu'elles prennent.

a) Expliquez rapidement pourquoi on peut considérer B_r et B_i comme des v.a. gaussiennes. On les considérera comme indépendantes et on notera :

$$f_{B_r}(B_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{B_r^2}{2\sigma^2}\right) \qquad f_{B_i}(B_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{B_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

les lois correspondantes. Quelle est la loi conjointe du couple (B_r, B_i) ?

b) On note S et φ le module et la phase de $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S} = Se^{i\varphi}.$$

Montrez que la loi conjointe notée $f(S,\varphi)$ du couple (S,φ) est donnée par :

$$f(S,\varphi) = \frac{S}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(S\cos\varphi - A_r)^2 + (S\sin\varphi - A_i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Indication : le plus simple est de faire le changement de variable $(S,\varphi) \to (B_r, B_i)$; on considère dans ce calcul A_r et A_i comme des constantes.

c) Comment calcule-t-on la loi marginale $f(S)$ de S ? On notera A et φ_0 le module et la phase de $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A} = Ae^{i\varphi_0}.$$

On rappelle que :

$$\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0 = \cos(\varphi - \varphi_0)$$

et on définit la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0 par :

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(x\cos\varphi)\ \mathrm{d}\varphi.$$

Montrez que :

$$f(S) = f_0 S \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AS}{\sigma^2}\right) \tag{5}$$

où f_0 est une constante à déterminer.

d) La fonction $f(S)$ est tracée sur la figure 1 pour une onde d'amplitude unité ($A = 1$) et pour différentes valeurs de l'amplitude du bruit σ. En développant $(A_r + B_r)^2$ et $(A_i + B_i)^2$ dire qualitativement pourquoi est-ce que l'abscisse du maximum des lois est toujours supérieur à 1. Que se passe-t-il lorsque dans un signal bruité on estime l'amplitude d'une onde par une méthode de moindres carrés généralisés c'est-à-dire en cherchant le maximum de la loi de probabilité ?

3) Signification de la détection d'un pic.

On s'intéresse maintenant à la question de savoir si la présence d'un pic dans l'amplitude d'une transformée de Fourier d'un signal bruité est significative. On va considérer pour cela un signal purement aléatoire (c'est-à-dire $A = 0$) et on va chercher la probabilité de présence d'un pic dans sa transformée de Fourier.

a) Montrez que la d.d.p. de S s'écrit dans ce cas :

$$f(S) = \frac{S}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right). \tag{6}$$

Vérifiez qu'il s'agit bien d'une d.d.p. On l'appelle loi de Rayleigh.

b) Calculez la probabilité $P_k = P(S > k\sigma)$ que S dépasse un certain seuil $k\sigma$. Quelle est la probabilité qu'il ne le dépasse pas ?

c) Pour N réalisations, quelle est la probabilité p_k qu'aucune des réalisations de S ne dépasse $k\sigma$; En déduire que la probabilité qu'au moins un parmi les N dépasse ce seuil est $1-(1-P_k)^N$.

d) Que peut-on en déduire sur la probabilté d'observer un pic dans une amplitude de transformée de Fourier en fonction du nombre de points N ? Calculez P_k, p_k et $1-p_k$ pour $k = 2, 3, 4, 5$. Si vous aviez effectué une transformée de Fourier sur N =1024 points, à combien de σ considéreriez-vous que l'amplitude d'un pic est significative ?

4) Test numérique.

On veut tester numériquement les calculs précédents. On dispose pour cela d'un générateur de nombres aléatoires, de loi uniforme entre 0 et 1 et nulle ailleurs.

a) A partir de ce générateur comment peut-on générer des valeurs suivant une loi de Rayleigh (définie par la relation (6))?

b) Quel nombre de pics dépassant $2, 3, 4$ et 5σ devrait-on voir en moyenne si on réalise 1024 fois ce type de réalisations.

c) La figure (2) donne une telle réalisation pour $\sigma = 1$. Est-ce que l'expérience satisfait la théorie?

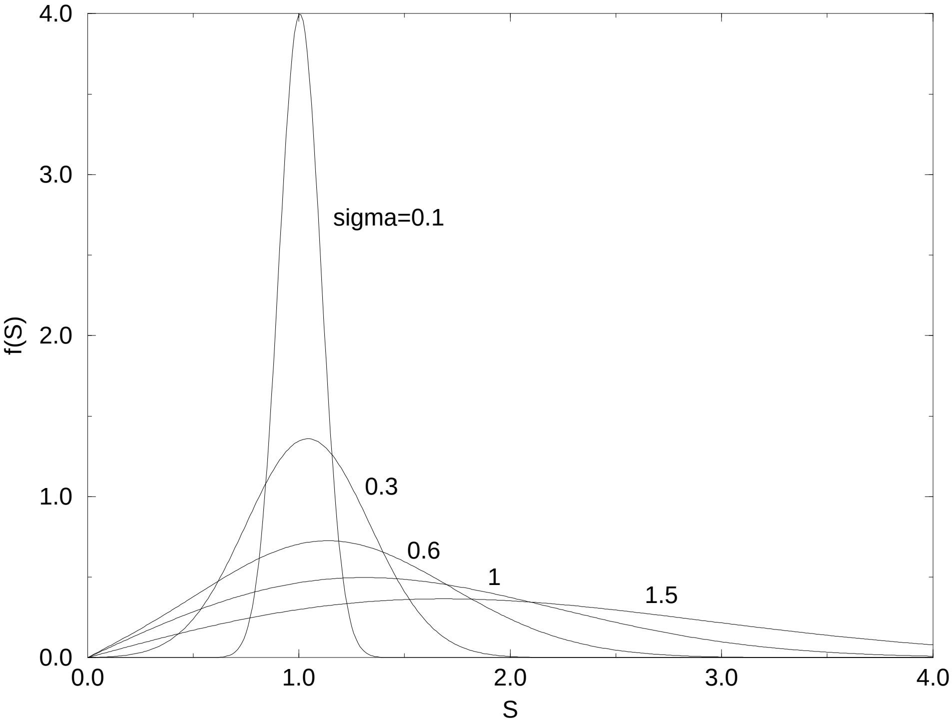

FIG. 1 - *Densité de probabilité de Rayleigh généralisée pour quelques valeurs de σ.*

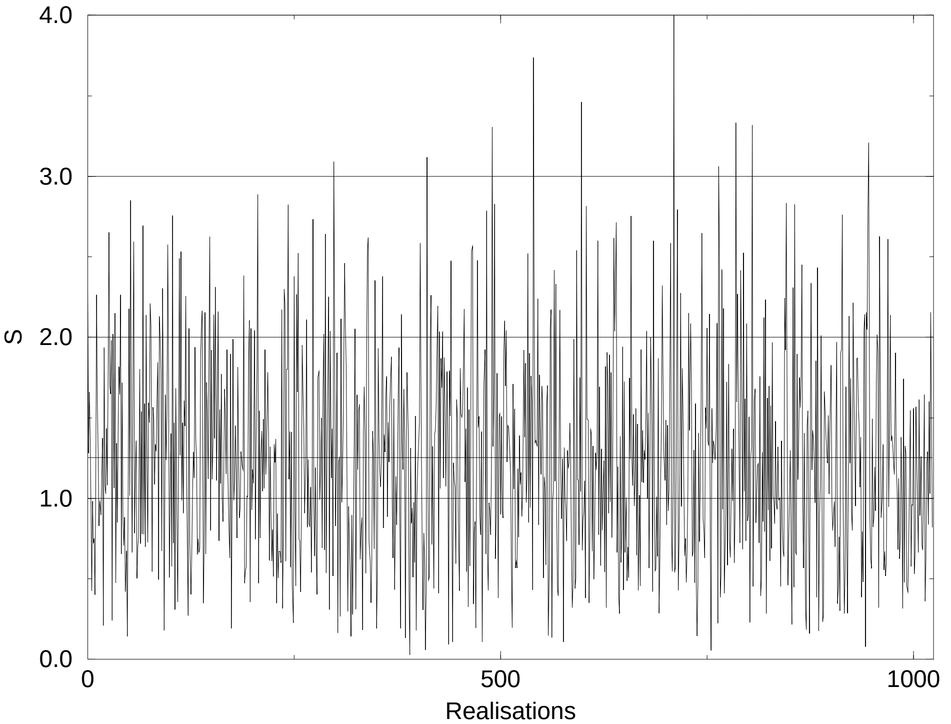

FIG. 2 - *1024 réalisations d'une v.a. suivant la loi de Rayleigh avec $\sigma = 1$. Les traits horizontaux donnent les seuils à $1, 2, 3$ et 4σ ainsi que la moyenne de la loi.*

Texte d'examen et corrigé disponibles à
`http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/HTML/enseig.html`