Examen de Mathématiques

26 février 2021

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

1. **[7 points]** On rappelle la définition :

$$\vec{\text{rot}}\vec{v} = \frac{1}{V}\int_{\partial V} \vec{n} \wedge \vec{v}\ \mathrm{d}S.$$

En expliquant, en déduire l'expression de $\vec{\text{rot}}\vec{v}$ en cartésiennes.

2. **[6 points]** Soit M un point repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, λ. Soit $M + \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ un point repéré par ses coordonnées sphériques $r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \lambda + \mathrm{d}\lambda$. Soient $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda$ les vecteurs du repère sphérique.

a) Faire un schéma de ces quantités. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ces quantités.

b) Sur le même schéma, dessiner le parallélépipède sphérique dont les coins ont pour coordonnées $r, \theta, \lambda, r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \lambda + \mathrm{d}\lambda$.

c) Sur le même schéma, indiquer les longueurs d'au moins 8 de ses cotés.

d) Détailler l'expression du flux d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ au travers de la surface du parallélépipède, en fonction de ces quantités. En déduire l'expression de la divergence en coordonnées sphériques.

3. **[7 points]**

On étudie l'évolution de la concentration d'un composé $c(x,t)$ au sein d'un solvant dans un bécher. Pour simplifier, on s'intéresse au problème unidirectionnel, les parois du bécher étant situées en $x = 0$ et $x = L$. Ce composé subit un phénomène de diffusion dans le bécher. De plus, il se dégrade avec le temps via une réaction chimique de cinétique d'ordre 1. Avec ces hypothèses, l'équation adimensionnée de l'évolution de $c(x,t)$ s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - c. \qquad (1)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial c}{\partial x}(x = L, t) = 0. \qquad (2)$$

On cherche une solution sous la forme :

$$c(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \qquad (3)$$

1. Justifier physiquement ces conditions aux limites.

2. Pourquoi a-t-on choisi un développement de $c(x,t)$ sous cette forme ?
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par les coefficients a_n.
4. En déduire que la solution est de la forme

$$c(x,t) = e^{-t}\left[\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right]. \tag{4}$$

5. On considère, qu'initialement, un gradient de concentration est établi dans le bécher : $c(x, t=0) = |x|$. Déduire, en expliquant la méthode utilisée, les expressions des $a_n(0)$ en fonction de n.
6. Que vaut $\lim_{t\to+\infty}(c(x,t))$?

— o —