Examen de Mathématiques
Décembre 2019

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

Opérateurs de dérivation (10 points)

$\boxed{\textbf{1.}}$ **[2 points]** Donner 3 définitions du rotationnel.

$\boxed{\textbf{2.}}$ **[5 points]** Soit M un point repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, λ. Soit $M + \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ un point repéré par ses coordonnées sphériques $r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \lambda + \mathrm{d}\lambda$. Soient $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda$ les vecteurs du repère sphérique.

a) Faire un schéma de ces quantités. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ces quantités.

b) Sur le même schéma, dessiner le parallélépipède sphérique dont les coins ont pour coordonnées $r, \theta, \lambda, r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \lambda + \mathrm{d}\lambda$.

c) Sur le même schéma, indiquer les longueurs de 8 de ses cotés.

d) Détailler l'expression du flux d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ au travers de la surface du parallélépipède, en fonction de ces quantités. En déduire l'expression de la divergence en coordonnées sphériques.

$\boxed{\textbf{3.}}$ **[3 points]** Soit M un point repéré par ses coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

Soient r, θ, λ ses coordonnées sphériques, et $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda$ les vecteurs du repère sphérique.

a) Exprimer x, y, z en fonction de r, θ, λ. En déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de r, θ, λ et $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

b) Calculer les trois vecteurs suivants en fonction de r, θ, λ et $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\vec{E}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}, \quad \vec{E}_\theta = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}, \quad \vec{E}_\lambda = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda}.$$

c) En déduire l'expression des trois vecteurs unitaires en fonction de r, θ, λ et $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: $\vec{e}_r = \vec{E}_r/||\vec{E}_r||, \quad \vec{e}_\theta = \vec{E}_\theta/||\vec{E}_\theta||, \quad \vec{e}_\lambda = \vec{E}_\lambda/||\vec{E}_\lambda||$.

Séries de Fourier (10 points)

Exercice 1

Soit $a > 0$, on définit la fonction porte $\Pi_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Calculer sa transformée de Fourier $\tilde{\Pi}_a(\nu)$, la représenter.
2. Qu'est-ce que $\lim\limits_{a \to 0} \Pi_a$? Calculer sa transformée de Fourier.
3. Soit $b > 0$ et Π_b la fonction porte associée. Déterminer la transformée de Fourier de la convolution entre les deux portes $\Lambda_{ab} = \Pi_a * \Pi_b$.

Exercice 2

On considère l'équation de la chaleur adimensionnée d'inconnue $T(t, x)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad t \geq 0\,,\ x \in [0, 1] \tag{1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & T(t = 0, x) = T_0(x), \\ \forall t > 0, & T(t, x = 0) = 0, \\ \forall t > 0, & T(t, x = 1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

$T_0(x)$ est la température initiale, connue et respectant les même conditions aux bords $x = 0$ et $x = 1$ que $T(t, x)$.

1. Déterminer la solution stationnaire $T_\infty(x)$ de (1) (*i.e.* $\partial T_\infty / \partial t = 0$).
2. Montrer que $\theta(t, x) = T(t, x) - T_\infty(x)$ est encore solution de (1). Quelles sont les conditions aux limites que doit respecter θ ?
3. Justifier que l'on puisse chercher θ de la forme
$$\theta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$$
4. Comment peut on déterminer les $b_n(0)$?
5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par les $b_n(t)$ et la résoudre en fonction des $b_n(0)$.
6. En déduire que la solution au problème posé s'écrit :
$$T(t, x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(0) e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x)\,. \tag{3}$$