Examen de Mathématiques

Décembre 2017

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

Opérateurs de dérivation (7,5 points)

1. **[2,5 point]** Avec la méthode de votre choix, développer les expressions $\mathrm{div}(f\vec{u})$ et $\mathrm{div}(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (les exprimer en fonction des dérivées de f, $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

2. **[1,5]** a) Soit le champ scalaire $\psi(x, y, z) = 2z^2 - y^2 - x^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x, 0, z) = \text{cte}$.

b) **[2]** Donner l'expression de $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$, calculer sa divergence et son rotationnel. Représenter $\vec{v}$ sur la même figure que précédemment.

c) **[1,5]** Exprimer ψ en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, λ).

Programmation : orbite d'une planète (5,5 points)

On cherche à résoudre numériquement le mouvement d'une planète dans un champ de force central dû à une étoile sphérique beaucoup plus massive. Le mouvement est plan. On note la position $\vec{r} = (x, y)$, la vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y)$ et la distance au centre $r = ||\vec{r}||$. Le système différentiel correspondant au mouvement de la planète est :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -GM\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -GM\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}. \tag{3}$$

3. **[1]** A l'instant initial, on part des conditions $\vec{r} = (x_0, 0)$ et $\vec{v} = (0, v_0)$. Donner une échelle de temps caractéristique du système en fonction des données du problème. En déduire une condition approximative sur le pas de temps $\mathrm{d}t$ que vous allez choisir.

4. **[0,5]** Rappelez comment on peut approcher numériquement une dérivée première.

5. **[4]** Ecrire l'algorithme qui permet de résoudre numériquement cette équation de la surface au centre de la Terre. Définition : *un algorithme est une suite d'instructions à effectuer* *par une personne ou un calculateur pour résoudre un problème, indépendamment d'un langage de programmation.* Vous pouvez donc écrire l'algorithme comme si vous écriviez un programme avec un langage Matlab, Python ou autre, mais le langage utilisé n'a pas d'importance ; on peut l'écrire en "français" comme suit :

```
De i=1 à n
s(i)=racine(i)
Fin boucle.
```

Séries de Fourier (7 points)

(page suivante)

UCBL - ENS de Lyon | Mathématiques et informatique
L3 Géosciences | F. Chambat
2017-2018 | R. Menaut

Partiel : **Partie Fourier**

$\rightsquigarrow$ *Les questions 1, 2 et 3 sont totalement indépendantes.*

1. On considère la fonction f, 2-périodique, définit par

$$\begin{cases} \forall x \in]0,2[, f(x) = 1 - x \\ f(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1.a. Justifier que f ainsi définie est égale à sa régularisée.

1.b. Effectuer le développement en série de Fourier f.

2. On souhaite résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles d'inconnue $y(x,t)$ sur le domaine $x \in [0, L]$. La solution doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} y(x = 0, t) = 0 \\ y(x = L, t) = 0 \\ y(x, t = 0) = y_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

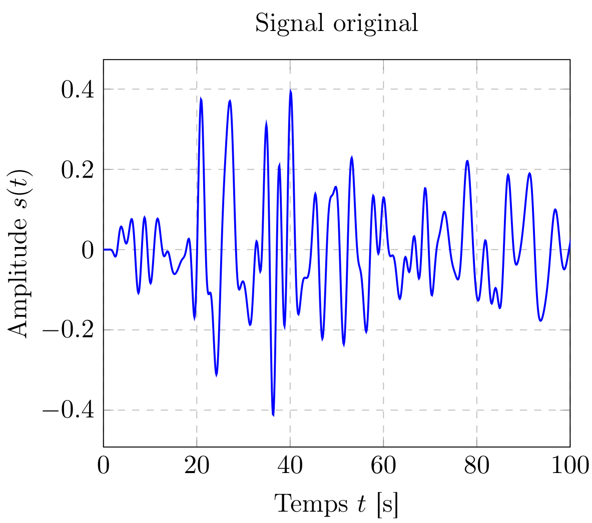
Pour résoudre ce problème, on décide de chercher les solutions sous la forme :

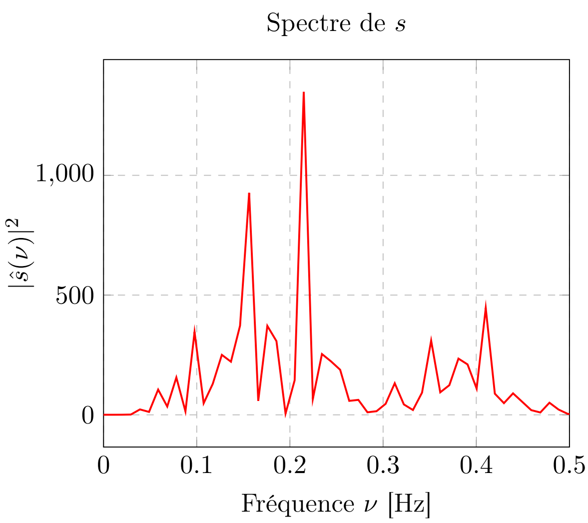
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \tag{3}$$

2.a. Justifier ce choix de développement.

2.b. Comment peut-on déterminer les valeurs des $b_n(0)$ à partir de y_0 ?

3. On a récupéré les données $s(t)$ d'un sismomètre lors d'un séisme. Après avoir effectué la transformée de Fourier discrète de ce signal, on trace son spectre $|\hat{s}(\nu)|^2$:





3.a. Pourquoi n'a-t-on représenté que les fréquences positives sur le spectre ?

3.b. Commenter ce spectre.