Examen de Mathématiques

2e session - mars 2017

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

Opérateurs de dérivation

1. Développer, avec la méthode indicielle ou non : $\mathrm{Rot}(f\vec{u})$.

2. **a.** Soit le champ scalaire $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Représenter graphiquement $f(x,y)$ et son gradient.

b. Calculer le champ vectoriel $\vec{v} = (\partial_y f, -\partial_x f)$ et sa divergence. Représenter ce champ vectoriel sur la même figure que précédemment.

Programmation : résolution d'équation différentielle

On connait une fonction $\rho(r)$ et une constante G. Ecrire l'algorithme qui permet de déterminer, en N points régulièrement espacés, dans l'intervalle $r \in [\epsilon, R]$, la fonction $g(r)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = -2\frac{g(r)}{r} - 4\pi G\rho(r) \tag{1}$$

en partant de $g(\epsilon) = g_\epsilon$ connu.

Définition : *un algorithme est une suite d'instructions à effectuer par une personne ou un calculateur pour résoudre un problème, indépendamment d'un langage de programmation.* Vous pouvez donc écrire l'algorithme comme si vous écriviez un programme avec un langage Matlab ou autre, mais le langage utilisé n'a pas d'importance, et cela peut être aussi écrit en français comme suit :

```
De i=1 à n
s(i)=racine(i)
Fin boucle sur i
```

Texte disponible à `http://frederic.chambat.free.fr/ens`

Mathématiques et informatique
F. Chambat
R. Menaut

Partie Fourier

⇝ *Toutes les questions (excepté la B.4) peuvent être traitées individuellement en admettant les résultats précédents.*

A. Calcul d'une transformée de Fourier

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de f est : $\mathrm{TF}[f](\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$

B. Equation de la chaleur adimensionnée

On considère l'équation de la chaleur adimensionnée d'inconnue $T(t, x)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad t \geq 0\,,\ x \in [0, 1] \tag{1}$$

avec les conditions suivantes : $T(t > 0, x = 0) = 0,\ T(t > 0, x = 1) = 1,\ T(t = 0, x) = T_0(x)$

1. Déterminer la solution stationnaire $T_\infty(x)$ de (1) ($i.e.$ la solution telle que $\partial/\partial t = 0$).
2. Montrer que $u(t, x) = T(t, x) - T_\infty(x)$ est encore solution de (1). Quelles sont les conditions aux limites et aux bords que doit respecter u ?
3. On cherche u de la forme : $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin(\pi n x)$

   En dérivant cette expression, déterminer l'équation différentielle vérifiée par les $b_n(t)$ et la résoudre en fonction des $b_n(0)$.
4. En déduire que la solution au problème posé s'écrit :

$$T(t, x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(0) e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x) \tag{2}$$

5. Comment pourrait-on déterminer les expressions des $b_n(0)$ connaissant $T_0(x)$?