Examen de Mathématiques
Janvier 2016

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

## Opérateurs de dérivation (5 points)

**1.** **[1,5 point]** Développer les expressions $\mathrm{div}(f\vec{u})$ et $\mathrm{div}(\vec{u}\wedge\vec{v})$ (= les exprimer en fonction des dérivées de $f$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

**2.** **[1]** a) Soit le champ scalaire $\psi(x, y, z) = 2z^2 - y^2 - x^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x, 0, z) = \mathrm{cte}$.

b) **[1,5]** Donner l'expression de $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$, calculer sa divergence et son rotationnel. Représenter $\vec{v}$ sur la même figure que précédemment.

c) **[1]** Exprimer $\psi$ en fonction des coordonnées sphériques $(r, \theta, \lambda)$.

## Programmation : température isentrope (5 points)

On cherche à résoudre numériquement l'équation d'équilibre isentrope (ou adiabatique) de la température $T$ en fonction de la profondeur $z$ dans la Terre :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\alpha g}{C_p} T \tag{1}$$

avec $\alpha$ la dilatation thermique, $g$ la pesanteur et $C_p$ la capacité calorifique. On suppose que ces trois variables sont connues à toute profondeur $z$ et données dans la pratique par des fonctions matlab `alpha(z), g(z), Cp(z)`.

**1.** **[0,5]** Rappelez comment on peut approcher numériquement une dérivée première le plus simplement.

**2.** **[1,5]** Donner une échelle de longueur caractéristique sur laquelle varie la température. En déduire une condition approximative sur le pas de profondeur `dz` que vous allez choisir afin que la solution ait une précision souhaitée.

**3.** **[3]** Ecrire l'algorithme qui permet de résoudre numériquement cette équation de la surface au centre de la Terre. Définition : *un algorithme est une suite d'instructions à effectuer par une personne ou un calculateur pour résoudre un problème, indépendamment d'un langage de programmation.* Vous pouvez donc écrire l'algorithme comme si vous écriviez un programme avec un langage Matlab ou autre, mais le langage utilisé n'a pas d'importance ; le mieux étant encore de l'écrire en français comme suit :

```
De i=1 à n
s(i)=racine(i)
Fin boucle.
```

## Séries de Fourier (5 points)

On considère la fonction 2-périodique définie sur l'intervalle $[-1, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Représenter la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Est-ce que la fonction est paire, impaire ou rien du tout ? Que peut-on en déduire pour les coefficients du développement en série de Fourier de $f$ ?
3. Calculer le développement en série de Fourier de $f$.
4. Que peut-on dire sur la convergence de la série partielle de Fourier vers $f$ ?
5. On considère maintenant la fonction 2-périodique définie sur $[-1, 1[$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \tag{3}$$

   Représenter la fonction $g$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
6. Donner une relation entre $g$ et $f$. En déduire le développement de $g$ en série de Fourier. Que représente(nt) le(s) terme(s) en cos du développement ?

## Statistiques (5 points)

On veut étudier la proportion relative des principales espèces de foraminifères du Golfe de Guinée. Le tableau résume les proportions de ces différentes espèces dans 4 échantillons prélevés à des distances croissantes du rivage.

| nom | Bolivina albatrossi (%) | Ceratobulimina contraria (%) | Melonis barleeanus (%) |
|---|---|---|---|
| échantillon 1 | 22 | 51 | 27 |
| échantillon 2 | 31 | 40 | 29 |
| échantillon 3 | 34 | 36 | 30 |
| échantillon 4 | 42 | 26 | 32 |

1. Quelle transformation doit-on opérer pour traiter des données compositionnelles correctement ? Quel est l'intérêt de cette transformation ?
2. Donnez la composition moyenne de ces échantillons (pour la transformation, on prendra comme référence les compositions de Melonis Barleeanus).
3. On veut effectuer une régression orthogonale entre les compositions de Bolivina albatrossi et de Ceratobulimina contraria. Le modèle est

$$Y = a + bX$$

— quelle erreur cherche-t-on à minimiser pour une régression orthogonale ?

— montrez que :

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$
$$b = \pm\frac{S_Y}{S_X}$$

avec $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes respectives de $X$ et de $Y$ et $S_X$ et $S_Y$ les écarts types respectifs de $X$ et $Y$.

— Comment peut-on déterminer le signe de b ?

— A quoi correspondent $X$ et $Y$ dans notre cas ?

— Donnez les valeurs des coefficients $a$ et $b$.

— o —