

Examen de Mathématiques

2e session - mars 2016

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 1 h 30

— o —

Opérateurs de dérivation (5 points)

1. [2 points] Développer les expressions $\operatorname{div}(f\vec{u})$ et $\operatorname{div}(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (= les exprimer en fonction des dérivées de f , \vec{u} et \vec{v}).

2. [1,5] a) Soit le champ scalaire $\psi(x, y) = x^2 - y^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x, y) = \text{cte}$ et le champ $\vec{\nabla}\psi$.

b) [1,5] Donner l'expression de $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$, calculer sa divergence et son rotationnel. Représenter \vec{v} sur la même figure que précédemment.

Programmation : orbite (5 points)

On cherche à résoudre numériquement le mouvement d'une planète dans un champ de force central dû à une étoile sphérique. Le mouvement est plan et on note $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{v} = (v_x, v_y)$, $r = \|\vec{r}\|$. Le système différentiel correspondant est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \quad (2)$$

1. [1] Rappeler comment on peut approcher numériquement une dérivée première.

2. [4] A l'instant initial, on part des conditions $\vec{r} = (x_0, 0)$ et $\vec{v} = (0, v_0)$. Ecrire l'algorithme qui permet de résoudre numériquement le système différentiel et les conditions initiales. Définition : *un algorithme est une suite d'instructions à effectuer par une personne ou un ordinateur pour résoudre un problème, indépendamment d'un langage de programmation.* Vous pouvez donc écrire l'algorithme comme si vous écriviez un programme avec un langage Matlab ou autre, mais le langage utilisé n'a pas d'importance, et cela peut être aussi écrit en français comme suit :

De i=1 à n

s(i)=racine(i)

Fin boucle

Analyse de Fourier (5)

3. [2,5] Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique impaire g définie comme :

$$g(x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

AIDE : la méthode d'intégration par parties peut être utile.

4. [2,5] Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie pour tout x réel comme :

$$f(x) = \exp(-a|x|) \quad \text{avec } a > 0.$$

Statistiques (5 points)

On veut étudier la proportion relative des principales espèces de foraminifères du Golfe de Guinée. Le tableau résume les proportions de ces différentes espèces dans 4 échantillons prélevés à des distances croissantes du rivage.

nom	Bolivina albatrossi (%)	Ceratobulimina contraria (%)	Melonis barleeanus (%)
échantillon 1	22	51	27
échantillon 2	31	40	29
échantillon 3	34	36	30
échantillon 4	42	26	32

1. Quelle transformation doit-on opérer pour traiter des données compositionnelles correctement ? Quel est l'intérêt de cette transformation ?
2. Donnez la composition moyenne de ces échantillons (pour la transformation, on prendra comme référence les compositions de *Melonis Barleeanus*).
3. On veut effectuer une régression orthogonale entre les compositions de *Bolivina albatrossi* et de *Ceratobulimina contraria*. Le modèle est $Y = a + bX$.
 - quelle erreur cherche-t-on à minimiser pour une régression orthogonale ?
 - montrez que :

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$b = \pm \frac{S_Y}{S_X}$$

avec \bar{X} et \bar{Y} les moyennes respectives de X et de Y et S_X et S_Y les écarts types respectifs de X et Y .

— A quoi correspondent X et Y dans notre cas ?

— Donnez les valeurs des coefficients a et b .

— o —