Examen de Mathématiques
Janvier 2015

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 2 h

— o —

Quelques questions d'astronomie

Opérateurs de dérivation : champ de gravité (5 points)

On note $\vec{r} = (x, y, z)$ la position d'un point dans l'espace, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sa vitesse et $r = ||\vec{r}||$. On considère une étoile à symétrie sphérique de rayon R centrée au centre du repère ($r = 0$). Le champ de gravité *à l'extérieur* de cette étoile est :

$$\vec{g} = -GM\,\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Propriété du champ

$\boxed{\textbf{1.}}$ **[1 point]** Calculer la divergence de $\vec{g}$ à l'extérieur.

$\boxed{\textbf{2.}}$ **[1]** Pour calculer la divergence à l'intérieur on considère toujours que l'étoile est sphérique mais infiniment petite et homogène (cela peut paraître abusif mais cela revient en fait à supposer que $\operatorname{div}\vec{g}$ est constant dans l'étoile). On utilise :

$$\int_V \operatorname{div}\vec{g}\ \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{g}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S. \tag{2}$$

Calculer la divergence à l'intérieur du volume en fonction de la densité.

$\boxed{\textbf{3.}}$ **[0,5]** Peut-on écrire $\vec{g}$ comme le rotationnel d'un potentiel ?

Orbite d'une planète

$\boxed{\textbf{4.}}$ **[0,5]** On rappelle le principe fondamental de la dynamique appliqué à une planète orbitant autour de l'étoile :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{g}. \tag{3}$$

On pose $\vec{p} = \vec{r}\wedge\vec{v}$. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}. \tag{4}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ **[0,5]** Cela prouve que $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$. En déduire que le mouvement de la planète est plan.

$\boxed{\textbf{6.}}$ **[1,5]** On suppose que le mouvement est circulaire (rayon r) uniforme (vitesse angulaire ω) dans le plan $z = 0$. Ecrire x et y en fonction de r et ωt et en déduire que

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\vec{r}. \tag{5}$$

En déduire ω en fonction de G, M et r.

Programmation : orbite (5 points)

On cherche à résoudre numériquement mouvement d'une planète dans un champ de force central dû à une étoile sphérique. Le mouvement est plan et on note $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{v} = (v_x, v_y)$, $r = ||\vec{r}||$. Le système différentiel correspondant est :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -GM\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}. \tag{7}$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ **[0,5]** Expliquer ces relations ; pourquoi les a t'on écrites sous forme de deux équations différentielles du premier ordre plutôt qu'une seule du second ordre ?

$\boxed{\textbf{2.}}$ **[1]** A l'instant initial, on part des conditions $\vec{r} = (x_0, 0)$ et $\vec{v} = (0, v_0)$. Donner une échelle de temps caractéristique du système en fonction des données du problème. En déduire une condition approximative sur le pas de temps dt que vous allez choisir.

$\boxed{\textbf{3.}}$ **[0,5]** Rappelez comment on peut approcher numériquement une dérivée première.

$\boxed{\textbf{4.}}$ **[2,5]** Ecrire l'algorithme qui permet de résoudre numériquement le système différentiel et les conditions initiales. Définition : *un algorithme est une suite d'instructions à effectuer par une personne ou un calculateur pour résoudre un problème, indépendamment d'un langage de programmation.* Vous pouvez donc écrire l'algorithme comme si vous écriviez un programme avec un langage Matlab ou autre, mais le langage utilisé n'a pas d'importance, et cela peut être aussi écrit en français comme suit :

```
De i=1 à n
s(i)=racine(i)
Fin boucle
```

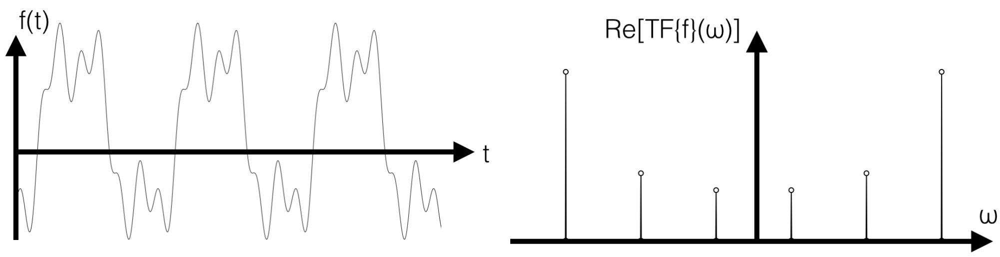
Analyse de Fourier : détection d'exoplanètes (5 points)

La méthode des vitesses radiales consiste à mesurer la variation du spectre d'une étoile due à la présence d'une planète. En effet, la planète et l'étoile orbitent autour du centre de masse du système ce qui se traduit par une variation périodique de la distance étoile-observateur. Cette oscillation est observée au niveau des raies d'absorption et d'émission propres à l'étoile. Par simplicité, on supposera que les orbites des planètes sont circulaires et qu'on observe le système planétaire par la tranche (plan de l'écliptique). Ceci veut dire qu'il n'y a pas d'effet dû à l'inclinaison.

Dans un système avec une seule planète autour d'une étoile de masse M_* connue, on observe une variation périodique du spectre dont on peut facilement extraire la période. La planète ayant une vitesse keplerienne ($v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM_*}{a}}$), on obtient alors le rayon de l'orbite a. Dans le cas d'un système avec plusieurs planètes, le signal devient très compliqué et on peut alors faire appel à l'analyse de Fourier. La Fig. 1a montre la vitesse radiale de l'étoile mesurée en fonction du temps auquel on applique la TF (Fig. 1b). Dans ce cas particulier, on étudie un système planétaire avec 3 planètes. On peut donc écrire le signal f de la façon suivante :

$$f(t) = f_\alpha(t) + f_\beta(t) + f_\gamma(t) = A_\alpha \cos(\omega_\alpha t) + A_\beta \cos(\omega_\beta t) + A_\gamma \cos(\omega_\gamma t)$$

L'indice α est associé à la planète la plus proche de l'étoile et γ à celle la plus lointaine. Les coefficients A sont les demi-amplitudes des signaux individuels des planètes.



(a) Vitesse radiale en fonction du temps (b) Partie réelle de la TF de la fonction f

FIGURE 1

a) **[1]**. Calculer la transformée de Fourier de $f_1(t) = A\cos(\omega_0 t)$ et $f_2(t) = A\sin(\omega_0 t)$ et exprimer les résultats en fonction de la fonction $\delta(\omega)$. Commenter la parité des fonctions obtenues.

Rappel : TF $\{\exp(\mathrm{i}\omega_0 \mathrm{t})\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

b) **[1]** Soient n et m deux entiers strictement positifs. Expliquer dans quelle configuration du système planétaire on peut réécrire f en fonction de la pulsation de la planète la plus lointaine ω_γ :

$$f(t) = \alpha\cos(n\omega_\gamma t) + \beta\cos(m\omega_\gamma t) + \gamma\cos(\omega_\gamma t)$$

Écrire alors l'expression des rayons (a_γ, a_β, a_α) des orbites des planètes en fonction de M_*, ω_γ, m et n. Quelle condition sur n et m imposent les lois de Kepler ?

c) **[1]** Exprimer la TF de f grâce à la fonction $\delta(\omega)$. Reproduire schématiquement la Fig. 1b en identifiant les spectres avec les différentes planètes.

d) **[1]** Quel paramètre planétaire, autre que son orbite, est étroitement lié à l'amplitude des spectres ? Que peut-on dire qualitativement de la planète γ par rapport aux autres dans ce cas ?

e) **[1]** Supposons que l'on ajoute une phase ϕ au signal dû à la planète α.

$$f(t) = \alpha\cos(\omega_\alpha t + \phi) + \beta\cos(\omega_\beta t) + \gamma\cos(\omega_\gamma t)$$

Quel est l'effet sur la partie réelle et la partie imaginaire de la TF de f ?

Statistiques sur les astéroïdes (5 points)

On s'intéresse aux astéroïdes de la ceinture principale d'astéroïdes de notre système solaire. On a estimé la densité et le rayon de deux séries d'astéroïdes : ceux de type S et ceux de type C (tableau 1). Ces deux types d'astéroïdes se distinguent notamment par leur aspect ainsi que par le spectre de la lumière qu'ils réfléchissent.

On souhaite savoir si l'on peut les différencier par leur densité également. Pour cela, on a calculé la moyenne et l'écart-type des densités pour les deux types d'astéroïdes.

a) **[0.5]**. Donnez l'expression des estimateurs non biaisés de la moyenne et de l'écart-type des densités. On notera $\overline{X}_S$ et $\overline{X}_C$ les estimateurs de la moyenne et n_S et n_C le nombre total d'échantillons pour les astéroïdes de type S et C, respectivement.

b) **[2]**. On suppose que la distribution des densités des astéroïdes de chaque type suit une loi normale de même écart-type $\sigma = 0.6$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire :

$$\Delta = \frac{\overline{X}_S - \overline{X}_C}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_S} + \frac{\sigma^2}{n_C}}}$$

Nom	type	rayon (km)	erreur sur le rayon	densité	erreur sur la densité
Astrea	S	113.41	3.53	3.45	0.66
Hebe	S	190.92	7.15	3.81	0.5
Thalia	S	106.81	3.23	3.07	0.31
Phocaea	S	80.19	4.66	2.21	0.44
Echo	S	60.00	1.33	2.78	0.33
Moyenne	**S**	**110.27**	**3.98**	**3.06**	**0.45**
Ecart-type	**S**	**49.90**		**0.62**	
Nom	type	rayon (km)	erreur sur le rayon	densité	erreur sur la densité
Hygiea	C	421.60	25.69	2.19	0.42
Eugenia	C	201.81	14.77	1.34	0.29
Antiope	C	122.15	2.77	0.86	0.06
Minerva	C	149.79	8.08	1.98	0.39
Nuwa	C	146.54	9.15	0.98	0.22
Moyenne	**C**	**208.38**	**12.09**	**1.47**	**0.276**
Ecart-type	**C**	**122.68**		**0.59**	

TABLE 1 – densité et rayons d'astéroïdes de type S et C appartenant à la ceinture principale d'astéroïdes du système solaire.

dans l'hypothèse où les deux échantillons ont la même moyenne ? (on ne demande pas de démonstration) Doit-on rejeter cette hypothèse ? On détaillera le test statistique permettant de prendre la décision. On s'aidera des tables statistiques fournies.

c) **[2.5]**. On souhaite effectuer une régression pour tester la relation linéaire entre diamètre et densité pour les astéroïdes S.

1. Comparez l'erreur relative moyenne sur le diamètre des astéroïdes et celle sur leurs densités pour les astéroïdes de type S. Quel type de régression est la plus judicieuse : une régression linéaire simple ou une régression orthogonale ? pourquoi ?
2. Quelle expression doit-on minimiser pour trouver les paramètres de la régression ?
3. Déterminez l'expression de la pente et de l'ordonnée à l'origine pour cette régression, et donnez leurs valeurs.

— o —

Texte disponible à `http://frederic.chambat.free.fr/ens`

Tables statistiques

Table de la loi Normale centrée réduite

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est à dire la probabilité extérieure à l'intervalle ($-\varepsilon$, $+\varepsilon$).

α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,00	$+\infty$	2,576	2,326	2,170	2,054	**1,960**	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Exemple : pour $\varepsilon = 1,960$, la probabilité est $\alpha = 0,00 + 0,05 = 0,05$

TABLE POUR LES PETITES VALEURS DE LA PROBABILITÉ

α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
u_α	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

Table de Student

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,553	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,956
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
$+\infty$	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Exemple : avec d. d. l. = 10, pour t = 2,228, la probabilité est α = 0,05

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)

Table du Chi deux

La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	16,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Exemple : avec d. d. l. = 3, pour χ^2 = 0,584, la probabilité est α = 0,90

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)

Table du coefficient de corrélation

La table donne la probabilité α pour que le coefficient de corrélation égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée *r*, c'est à dire la probabilité extérieure à l'intervalle (-*r*, +*r*), en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411
14	0,4259	0,4973	0,5742	0,6226
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055
16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897
17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751
18	0,3783	0,4438	0,5155	0,5614
19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487
20	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	04869
30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4487
35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182
40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3932
45	0,2428	0,2875	0,3384	0,3721
50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830
90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673
100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540

Exemple : avec d. d. l. = 30, pour *r* = 0,3494, la probabilité est α = 0,05

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research

(Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)