Examen de Mathématiques
2e session - mars 2015

L3 de sciences de la Terre, ENS de Lyon.

Documents autorisés : tables statistiques. Durée 2 h

— o —

Opérateurs de dérivation (5,5 points)

$\boxed{1.}$ **[1 point]** Soit le champ scalaire $\psi(x, y) = x^2 - y^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x, y) =$ cte et le champ $\vec{\nabla}\psi$.

$\boxed{2.}$ **[1,5]** Soit le champ vectoriel $\vec{v} = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi)$. Donner son expression et calculer sa divergence. Représenter ce champ vectoriel sur la même figure que précédemment.

$\boxed{3.}$ **[1]**Quelle relation existe entre $\vec{v}$ et $\vec{\nabla}\psi$? Lorsque $\vec{v}$ représente une vitesse, ψ s'appelle la « fonction de courant » ; expliquer cette dénomination.

$\boxed{4.}$ **[1]** Calculer le rotationnel de $\vec{v}$ (en 3D la composante de $\vec{v}$ sur z est nulle : $\vec{v} = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi, 0)$).

$\boxed{5.}$ **[1]** Peut-on généraliser les résultats des deux questions précédentes aux champs scalaires ψ quelconques ?

Programmation : température isentropique (5)

On cherche à résoudre numériquement l'équation d'équilibre isentropique (ou adiabatique) de la température T en fonction de la profondeur z dans la Terre :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\alpha g}{C_p} T \tag{1}$$

avec α la dilatation thermique, g la pesanteur et C_p la capacité calorifique. On suppose que ces trois variables sont connues à toute profondeur z et données dans la pratique par des fonctions matlab `alpha(z), g(z), Cp(z)`.

$\boxed{1.}$ **[0,5]** Rappelez comment on peut approcher numériquement une dérivée première.

$\boxed{2.}$ **[1]** Donner une échelle de longueur caractéristique sur laquelle varie la température. En déduire une condition approximative sur le pas de profondeur `dz` que vous allez choisir.

3. **[2,5]** Ecrire l'algorithme qui permet de résoudre numériquement cette équation de la surface au centre de la Terre.

4. **[1]** Rappelez comment on peut approcher numériquement une intégrale. En déduire *le principe* d'un deuxième algorithme pour résoudre numériquement l'équation (1).

Analyse de Fourier (6)

1. **[1]** En partant de la définition du produit de convolution, démontrer la propriété de la transformée de Fourier suivante :

$$TF\left\{f(x) * g(x)\right\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

où F et G sont les transformées de Fourier de f et de g respectivement.

2. **[2]** Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire g définie comme :

$$g(x) = (\pi - x)x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

AIDE : la méthode d'intégration par parties peut être utile.

3. **[2]** Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie pour tout x réel comme :

$$f(x) = \exp(-a|x|) \quad \text{avec } a > 0$$

4. **[1]** Expliquer brièvement pourquoi la transformée de Fourier est un outil puissant pour résoudre des équations différentielles aux dérivées partielles telles que l'équation de la chaleur. Ecrire la propriété de la transformée de Fourier qui permet de simplifier ce type de problèmes.

Test statistique (3,5)

On veut vérifier la concentration en nitrates de l'eau courante. Pour ce faire, on mesure deux fois par jour, pendant une semaine, la concentration en nitrates de l'eau du robinet. On notera X_i la variabe aléatoire associée à la i-ème valeur de concentration.

a) **[0.5]**. Donnez l'expression des estimateurs non biaisés de la moyenne $\overline{X}$ et de l'écart type S de la concentration en nitrate. On notera n le nombre de mesures.

b) **[0.5]**. On suppose que la distribution de la concentration en nitrates suit une loi normale de moyenne μ. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire :

$$\Delta = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S} \quad ?$$

(on ne demande pas de démonstration)

c) **[2.5]**. Les dernières publications officielles affichaient une concentration en nitrates de $\mu = 49,85$ mg/L. Nos mesures donnent une moyenne empirique de $50,5$ mg/L, et un écart type empirique de $0,6$ mg/L. Doit-on faire confiance aux mesures officielles ? On détaillera le test statistique permettant de prendre la décision :

— Quelle est l'hypothèse nulle ?

— Quelle est la variable discriminante ?

— Définissez la zone de rejet

En vous aidant des tables statistiques fournies, donnez votre décision finale.

— o —

Tables statistiques

Table de la loi Normale centrée réduite

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est à dire la probabilité extérieure à l'intervalle ($-\varepsilon$, $+\varepsilon$).

α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,00	$+\infty$	2,576	2,326	2,170	2,054	**1,960**	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Exemple : pour ε = 1,960, la probabilité est α = 0,00 + 0,05 = 0,05

TABLE POUR LES PETITES VALEURS DE LA PROBABILITÉ

α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
u_α	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)

Table de Student

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,553	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,956
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
$+\infty$	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Exemple : avec d. d. l. = 10, pour t = 2,228, la probabilité est α = 0,05

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)

Table du Chi deux

La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	16,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Exemple : avec d. d. l. = 3, pour χ^2 = 0,584, la probabilité est α = 0,90

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)

Table du coefficient de corrélation

La table donne la probabilité α pour que le coefficient de corrélation égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée *r*, c'est à dire la probabilité extérieure à l'intervalle (-*r*, +*r*), en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl / α	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411
14	0,4259	0,4973	0,5742	0,6226
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055
16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897
17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751
18	0,3783	0,4438	0,5155	0,5614
19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487
20	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	04869
30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4487
35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182
40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3932
45	0,2428	0,2875	0,3384	0,3721
50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830
90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673
100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540

Exemple : avec d. d. l. = 30, pour *r* = 0,3494, la probabilité est α = 0,05

(d'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research

(Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs)