Examen Maths
Janvier 2014

L3 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Documents autorisés : aucun. Durée 2 h

— o —

Chacune des trois parties aura approximativement le même coefficient dans la notation (6 ou 7 points chacune).

Opérateurs de dérivation

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit le champ scalaire $\psi(x, y) = x^2 - y^2$. Représenter graphiquement les courbes $\psi(x, y) = cte$ et le champ $\boldsymbol{\nabla}\psi$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit maintenant le champ $\boldsymbol{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$. Donner son expression et calculer sa divergence. Représenter ce champ vectoriel sur la même figure que précédemment. Quelle relation existe entre ce champ et ceux représentés précédemment. Pouvez-vous généraliser à d'autres formes de champs scalaire ψ ? Justifier le nom donnée à ψ lorsque $\boldsymbol{u}$ représente une vitesse : la « fonction de courant ».

$\boxed{\textbf{3.}}$ Calculer le rotationnel de $\boldsymbol{u}$ (en 3D la composante de $\boldsymbol{u}$ sur z est nulle : $\boldsymbol{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi, 0)$). Exprimer ce champ de manière générale en fonction de ψ.

Séries de Fourier : profil thermique de la Terre

On étudie l'évolution de la température de la Terre, depuis sa formation jusqu'à aujourd'hui. On utilise un modèle très simple, unidimensionnel et négligeant la sphéricité de la planète. Le domaine d'étude est ainsi un segment $[0, X]$, où X est le centre de la Terre et 0 la surface. On note la température $T(x, t)$.

- Initialement, la Terre est formée en fusion, et sa température est uniforme : $T(x, 0) = T_0(x) = T_h = 2000\,\mathrm{K}$.
- La Terre est placée dans un environnement à $0\,\mathrm{K}$, on a donc à la surface : $\forall t,\ T(0, t) = 0\,\mathrm{K}$.
- Au centre, par symétrie, on a la condition $\forall t,\ \frac{\partial T}{\partial x}(X, t) = 0$.

La température évolue par diffusion, et des éléments radioactifs chauffent uniformément tout le volume. L'équation d'évolution de la température est donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h, \quad \kappa,\, h > 0. \tag{1}$$

On va résoudre cette équation à l'aide des séries de Fourier.

1. Faire un dessin d'une solution typique sur $[0, X]$, qui respecte les conditions aux bords. Dessiner également la condition initiale.

2. Compte tenu de la condition en $x = 0$, on écrit

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \sin \frac{2\pi n x}{\tilde{X}} \tag{2}$$

où $\tilde{X}$ est un multiple de X. Pourquoi a-t-on exclu les cosinus du développement ?

3. Vérifier que la condition au bord en $x = X$ est satisfaite si l'on prend

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2X}. \tag{3}$$

4. Quelle est la période de cette série de Fourier ? Tracer son mode fondamental ($n = 0$). Comment faut-il prolonger la condition initiale ? Tracer cette dernière sur le même dessin que le mode fondamental.

Le prolongement de la condition initiale, que l'on note $\widetilde{T_0}(x)$, a pour série de Fourier :

$$\widetilde{T_0}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2T_h}{\pi(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2X}. \tag{4}$$

De même, le prolongement de la fonction source de chaleur a pour série de Fourier :

$$\widetilde{q}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2h}{\pi(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2X}. \tag{5}$$

5. La fonction $\widetilde{T_0}(x)$ est une fonction créneau. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{T_0}(x)$ vers $\widetilde{T_0}(x)$?

6. On va maintenant résoudre l'équation (1). En insérant les développements de $T(x,t)$ et de $\widetilde{T_0}(x)$, écrire l'équation vérifiée par le coefficient $a_n(t)$. On introduira un temps caractéristique τ_n.

7. Résoudre l'équation vérifiée par $a_n(t)$. On fera apparaitre une constante C_n dépendant de $a_n(t = 0)$, et on obtiendra par ailleurs $a_n(t = 0)$ à l'aide du développement (4).

Marche aléatoire : la grenouille dans le tuyau

Soit une grenouille se déplaçant par sauts successifs à l'intérieur d'un tuyau. On suppose que chaque saut X_i est une variable aléatoire statistiquement indépendante des autres, et que tous les X_i suivent la même loi de probabilité de moyenne nulle et de variance σ^2.

Les questions peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Exprimer la moyenne et la variance du déplacement total après N sauts. On pourra poser $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

2. On s'intéresse à la loi de probabilité qui régit le déplacement total. On considère la variable aléatoire suivante :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sigma\sqrt{N}}.$$

Démontrer que l'on peut exprimer la fonction génératrice g_Z en fonction de g_X de la manière suivante :

$$g_Z(t) = \prod_{i=1}^{N} g_{X_i}(t/(\sigma\sqrt{N}))$$

On rappelle que $g_Z(t) = E(e^{Zt})$, où E représente l'espérance.

3. En utilisant le développement limité de g_Z et en prenant la limite lorsque N tend vers l'infini, on peut démontrer le résultat suivant (admis) :

$$\lim_{N\to\infty} g_Z(t) = e^{-t^2/2}$$

Que peut on dire de la loi suivie par la variable aléatoire Z ? Justifier votre réponse.

4. On s'intéresse au déplacement total de la grenouille. On pose :

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Soit τ le temps entre deux sauts successifs. Le nombre de pas s'exprime alors de la façon suivante : $N = t/\tau$. On admettra que la loi suivie par X lorsque N est très grand (c'est-à-dire lorsque t est très grand) est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau}}} \exp\left(\frac{\tau x^2}{\sigma^2 t}\right)$$

où x représente la coordonnée spatiale. Montrer que f_X est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Donner l'expression et la dimension de D. Quel est le phénomène physique décrit par cette équation ?

— o —