Mathématiques
Examen du mardi 11 janvier 2000

Magistère des sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 3 pages. Durée conseillée : 1 h30. Les questions sont indépendantes.

— o —

Problème II

Les harmoniques sphériques

Résolution de l'équation des ondes en coordonnées sphériques

On se propose de résoudre l'équation d'onde en géométrie sphérique. On rappelle l'expression de la divergence et du gradient en coordonnées sphérique :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}U = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi} \end{array} \right.$$

1. L'équation d'onde s'écrit $\Delta S = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$. Montrer qu'elle s'exprime en coordonnées sphériques selon

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

2. On cherche une solution de cette équation sous la forme

$$S(r,\theta,\phi,t) = R(r).\Theta(\theta).\Phi(\phi).T(t), \text{ avec } T(t) = e^{i\omega t}.$$

a) En injectant cette solution dans l'équation d'onde, réécrire l'équation d'onde sous la forme $F(r) + G(\theta,\phi) = 0$.

b) La seule façon de vérifier cette dernière équation pour tout r, θ, et ϕ est d'écrire $F(r) = Cte = -G(\theta,\phi)$. Ainsi, en prenant pour constante $l(l+1)$, montrer que R vérifie

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - l(l+1)\right]R = 0. \quad (1)$$

c) En raisonnant de la même façon, écrire l'équation $G(\theta,\phi) = -l(l+1)$ sous la forme $H(\theta) + K(\phi) = 0$ et montrez que Θ et Φ vérifient

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l(l+1)\right](\sin\theta)\Theta = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2} + m^2\Phi = 0. \quad (3)$$

Où la constante m^2 a été introduite de la même façon que $l(l+1)$.

3. Donnez la forme générale des solutions de (3). En utilisant les propriétés de périodicité de $\Phi(\phi)$ énoncer une propriété vérifiée par m.

4. Pour résoudre l'equation (1), il est plus commode d'utiliser la variable $x = \frac{\omega r}{c}$. On écrit $J(x) = R(r)$.

a) Montrer que $J(x)$ vérifie

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dJ}{dx}\right) + \left[x^2 - l(l+1)\right] J = 0. \tag{4}$$

b) Nous allons résoudre cette équation dans le cas où $l = 0$. En posant $W(x) = J(x).x$, écrire l'équation vérifiée par W. La résoudre et en déduire que $J(x) = A.\sin(x)/x$ est la solution non divergente en 0 de (4) , où A est une constante d'intégration.

c) En déduire que pour $l = 0$, $R(r)$ est de la forme $\frac{sin(\frac{\omega r}{c})}{r}$.

Les solutions générales de l'équation (4) sont les fonctions de Bessel

$$J_l(x) = x^l\left(\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x}$$

5. La résolution de l'équation différentielle vérifiée par $\Theta(\theta)$ est plus aisé en l'exprimant en terme de $x = cos(\theta)$

a) Soit $P_l^m(x) = \Theta(\theta)$, où $x = \cos(\theta)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $P_l^m(x)$. Montrer que dans le cas $m = 0$, elle s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)P(x) = 0. \tag{5}$$

b) Nous allons chercher les solutions de cette équation sous la forme de polynômes $P_l(x)$. On rappelle qu'un polynôme P de degré n est de la forme

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k \\ &= a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 \text{ où } (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Donner le degré des polynômes $P_l(x)$.

c) Montrer que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3.x^2 - 1)$ sont solutions de l'équation (5).

Les polynômes P_l sont les polynômes de Legendre,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}((x^2-1)^l),$$

dans le cas général $\{l, m\} \neq \{0, 0\}$, les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \text{ où } -l \leq m \leq l.$$

Le produit $\Theta(\theta)\Phi(\phi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ est appelé harmonique sphérique de degré l et d'ordre m, on la note $Y_l^m(\theta, \phi)$.

Propriétés des harmoniques sphériques

Tout comme les fonctions sinus et cosinus forment une base pour les fonctions définies sur un cercle (les fonctions d'une variable 2π-périodiques), les harmoniques sphériques Y_l^m forment une base pour les fonctions définies sur une sphère :

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_l^m Y_l^m(\theta,\phi)$$

1. Ecrire Y_l^m lorsque $l=0$, $l=1$, $l=2$, n'écrire que les cas où $m \geq 0$.

2. On appelle zéro d'une fonction, la valeur x_0 du domaine de définition de la fonction tel que $f(x_0)=0$. Combien de zéros admettent les fonctions $\mathfrak{Re}(e^{im\phi})$ et $\mathfrak{Im}(e^{im\phi})$ pour $\phi \in [0, 2\pi[$?

3. Combien de zéros admettent les fonctions $P_l^m(\cos\theta)$ pour $\theta \in [0,\pi]$ dans les cas, $l=0$, $l=1$, $l=2$, $(0 \leq m \leq l)$?

4. En déduire les zéros des fonctions $\mathfrak{Re}\,(Y_l^m(\theta,\phi))$ dans les cas $l=0$ et $l=1$, $l=2$, $(0 \leq m \leq l)$ et leur positions sur une sphère.

5. Dessiner qualitativement sur une sphère la forme des fonctions $\mathfrak{Re}\,(Y_l^m(\theta,\phi))$ dans les cas $l=0$, $l=1$ et $l=2$ $(0 \leq m \leq l)$. Que remarquez-vous ? A quoi correspondent l et m ?

6. Nous allons tenter de généraliser cette dernière propriété des harmoniques sphériques.

a) Combien ont de zéros les polynômes de degrés 0, du type $P(x)=a$? Combien ont de zéros les polynômes de degrés 1, du type $P(x)=ax+b$? Combien de zéros ont les polynômes de degré 2, du type $P(x)=ax^2+bx+c$? En déduire combien a, au maximum, de zéros un polynôme de degré n.

b) En déduire combien les polynômes $P_l(x)$ admettent au maximum de zéros.

c) Soit le polynôme de degré 3, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, quel est le degré du polynôme $\frac{dP}{dx}$? du polynôme $\frac{d^2P}{dx^2}$? du polynôme $\frac{d^3P}{dx^3}$? En déduire quel est l'effet de la dérivation sur un polynôme de degré n.

d) Des propriétés précédentes, déduire le nombre maximum de zéros des polynômes $\frac{d^m P_l}{dx^m}$. En déduire le nombre de zéros des fonctions $P_l^m(x)$. On supposera que ces zéros sont tous compris entre 0 et 1. Que pouvez-vous dire du nombre de zéros de $f(\theta)=Y_l^m(\theta,\phi_0)$ où $\phi_0 \in [0, 2\pi[$?

e) En reprenant les résultats des questions 2 et 6.d, dessiner qualitativement sur une sphère la forme des fonctions (Y_l^m) pour différentes valeur du couple $\{l,m\}$ que vous choisirez.