Mathématiques

Examen du mardi 11 janvier 2000

Magistère des sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 3 pages. Durée conseillée : 1h30. Les questions sont indépendantes.

— o —

Problème I

sur les modes propres de rotation d'un planète rigide

Soit un corps occupant un volume V, on note :
Ox_1, x_2, x_3 un repère cartésien centré en O,
$M(x_1, x_2, x_3)$ un point courant de V,
ρ la densité en M,
$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{OM}$ la vitesse de M,
$\vec{f}$ la densité volumique des forces exercées en M,
$\vec{H}$ le moment cinétique : $\vec{H} = \int_V \rho\vec{OM} \wedge \vec{v}\ \mathrm{d}V$,
$\vec{L}$ le couple de forces : $\vec{L} = \int_V \vec{OM} \wedge \vec{f}\ \mathrm{d}V$.
On rappelle que les produits scalaire $\cdot$ et vectoriel $\wedge$ se dérivent comme le produit usuel, que par définition $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ et que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Théorème du moment cinétique

1. Dans un corps en mouvement la conservation de la masse peut s'écrire, dans un repère galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho F\ \mathrm{d}V = \int_V \rho\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}V, \qquad (1)$$

pour tout champ scalaire ou vectoriel F et tout volume V suivant les particules. En déduire le théorème du moment cinétique dans un repère galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}}{\mathrm{d}t} = \vec{L}. \qquad (2)$$

2. Montrer en prenant une fonction scalaire F particulière que la relation (1) est suffisante pour qu'il y ait conservation de la masse.

Rotation solide

Soit $\vec{\omega}$ un vecteur appelé vecteur rotation et soit un mouvement décrit par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.

3. Montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} OM^2 = 0$.

4. Soient deux points M et M' du corps, montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M'M^2 = 0$.

5. Que signifient ces deux relations ?

6. Calculer $\vec{OM} \wedge \vec{v}$, en déduire que sa j^{eme} composante est :

$$(\vec{OM} \wedge \vec{v})_j = x_l x_l \omega_j - x_k x_j \omega_k = x_l x_l \delta_{kj} \omega_k - x_k x_j \omega_k \tag{3}$$

où on a utilisé la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

7. En déduire que $\vec{OM} \wedge \vec{v} = m_{\mathcal{I}} \vec{\omega}$, où $m_{\mathcal{I}}$ est une matrice que l'on explicitera.

8. En déduire que $\vec{H} = \mathcal{I} \vec{\omega}$, où $\mathcal{I}$ est une matrice (appelé tenseur d'inertie) que l'on explicitera. Montrer que cette matrice est symétrique.

Dérivée du moment cinétique

9. Pourquoi peut-on dire qu'il existe un repère principal lié au solide dans lequel $\mathcal{I}$ s'écrit :

$$\mathcal{I}' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{4}$$

10. Si on suppose que le solide décrit des petites rotations le tenseur d'inertie $\mathcal{I}$ dans le repère « fixe » se déduit alors de $\mathcal{I} = R\mathcal{I}'R^{-1}$ où R est la matrice de rotation au premier ordre en θ_j :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

avec θ_j l'angle de rotation autour de l'axe j. Les θ_j sont considérés comme petits et on effectuera les calculs au premier ordre. Pourquoi est-ce que $R^{-1} = R^T$ où R^T est la transposée de R.

11. En déduire que :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & \theta_3(A-B) & \theta_2(C-A) \\ \theta_3(A-B) & B & \theta_1(B-C) \\ \theta_2(C-A) & \theta_1(B-C) & C \end{pmatrix}. \tag{6}$$

12. On notera $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ la vitesse moyenne de rotation de la Terre autour de ses Pôles dans l'espace en un jour sidéral (23h56). On se propose de décrire les rotations de la planète dans ce repère tournant à vitesse Ω constante. On notera :

$$\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\omega_1, \omega_2, \Omega + \omega_3) \tag{7}$$

et on supposera $\omega_j \ll \Omega$. Montrer que :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} A\omega_1 + \Omega\theta_2(C-A) \\ B\omega_2 + \Omega\theta_1(B-C) \\ C(\omega_3 + \Omega) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Rotation de la Terre solide

13. En utilisant le théorème du moment cinétique dans le repère tournant à vitesse $\vec{\Omega}$:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{H} = \vec{L}, \tag{9}$$

déduire de ce qui précède que :

$$A\ddot{\theta}_1 + \Omega(C-A)\dot{\theta}_2 - \Omega B\dot{\theta}_2 - \Omega^2(B-C)\theta_1 = L_1 \tag{10}$$

$$B\ddot{\theta}_2 + \Omega(B-C)\dot{\theta}_1 + \Omega A\dot{\theta}_1 + \Omega^2(C-A)\theta_2 = L_2 \tag{11}$$

$$C\ddot{\theta}_3 = L_3 \tag{12}$$

14. Les fréquences propres de ce système s'obtiennent en posant $\vec{L} = 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\vec{\theta} = \vec{\alpha}e^{i\lambda t}$. Écrire alors le système d'équations précédent sous la forme $P\vec{\alpha} = \vec{0}$ où et P une matrice à préciser. Pourquoi écrit-on alors que le déterminant de P est nul ?

15. Quel relation vérifie λ ? En déduire que les pulsations propres de rotation de la Terre sont $\lambda = 0, \pm\Omega, \pm\Omega\sqrt{(C-A)(C-B)/AB}$. Pour résoudre l'équation aux valeurs propres on pourra poser $x = (\lambda/\Omega)^2$ et $\beta = (C-A)(C-B)/AB$.

16. Application numérique. On considère une symétrie de révolution (A=B) et la valeur $(C-A)/A = 1/305$. Calculer la période propre (en jours sidéraux) correspondant à $\lambda = \Omega(C-A)/A$.

17. Ce calcul détermine la période du mode de Chandler. Si on tient compte des déformations de la Terre et des océans on trouve une période théorique de 430 jours. Proposez une méthode pour mesurer cette période propre à partir de données de θ_1 et θ_2 au cours du temps.

18. Il existe un couple de marée luni-solaire L_3. Montrer que la variation correspondante de la longueur du jour T est $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = -T^2 L_3/2\pi C$. Application numérique : $L_3/C = -6.10^{-22}\mathrm{s}^{-2}$. Combien la durée du jour gagne-elle de secondes par siècle ?

— Fin —