Mathématiques
Examen de septembre 1999

Magistère des sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen sans documents. 2 pages. Durée :2 h00.

— o —

Problème
sur l'ajustement d'un signal

A des temps $t = t_i$ régulièrement espacés, on effectue la mesure $g_i = g(t_i)$ de la gravité en un point de la Terre. La physique nous indique que la gravité peut être représentée sous la forme d'une somme de J sinusoïdes :

$$g(t) = \sum_{j=1}^{J}(a_j \cos(\omega_j t) + b_j \sin(\omega_j t)), \tag{1}$$

où les ω_j sont des pulsations parfaitement connues. On note m et d les vecteurs :

$$m = (m_j)^T_{j=1,2J} = (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_J, b_1, \ldots, b_J)^T \tag{2}$$

$$d = (d_i)^T_{i=1,I} = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_I)^T \tag{3}$$

où ^{T} désigne la transposée. On va chercher une estimation $\hat{m}$ de m. On notera :

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{j=1}^{J}(a_j \cos(\omega_j t_i) + b_j \sin(\omega_j t_i)) - d_i\right)^2 \tag{4}$$

Première méthode

1. Calculer les dérivées de ϵ par rapport aux m_j.

2. En déduire que le $\hat{m}$ qui minimise ϵ est la solution d'un système de la forme $A\hat{m} = B$, où A et B sont une matrice et un vecteur que l'on explicitera en fonction des ω_j et des d_i. Quand peut-on écrire que $\hat{m} = A^{-1}B$? Comment s'appelle la méthode d'estimation que l'on vient d'appliquer ?

Deuxième méthode

3. Écrire la relation physique sous la forme $d = Gm$ où G est une matrice que l'on explicitera.

4. On admet que la densité de probabilité (*a posteriori*) de m s'écrit :

$$\rho(m) = \text{cste} \exp\left(-\frac{1}{2}(Gm - d)^T C_d (Gm - d)\right), \tag{5}$$

où C_d est la matrice de covariance des données d. Que signifie la « densité de probabilité » en terme de probabilité ?

5. On cherche le maximum de $\rho(m)$ de m. Pourquoi est-ce aussi le minimum de la quantité :

$$E(m) = (Gm - d)^T C_d^{-1} (Gm - d)\,? \tag{6}$$

6. Calculer $E(m + \delta m)$ au premier ordre en δm ($||\delta m|| \ll ||m||$).

7. Montrer que :

$$(Gm - d)^T C_d^{-1} G\delta m = (G\delta m)^T C_d^{-1}(Gm - d) = (\delta m)^T G^T C_d^{-1}(Gm - d) \tag{7}$$

8. En déduire la valeur de la dérivée :

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 2G^T C_d^{-1}(Gm - d). \tag{8}$$

9. En déduire que le résultat de la minimisation est donné par :

$$(G^T C_d^{-1} G)\hat{m} = G^T C_d^{-1} d. \tag{9}$$

10. Les données sont supposées décorellées et de même variance σ^2, c'est-à-dire $C_d = \sigma^2 I$, où I est la matrice identité. Retrouver le résultat donné par la première méthode (vérifier les expressions de A et B en fonction de G).

Exercices

11. La variable aléatoire X possède une loi gaussienne. Quelle est la loi de $\exp X$?

12. Quelles sont les valeurs propres et directions propres de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

— Fin —