Probabilités L3
Examen de septembre 1998

Magistère des sciences de la Terre, première année, ENS Lyon.

Examen sans documents. Durée : 1h30.

Les parties sont indépendantes. 2 pages

I.

Exercice inspiré de *Probabilités et statistique, Murray et Spiegel, Serie Schaum, p. 309*

Le tableau ci-dessous représente les fréquences des distributions (c'est-à-dire le nombre d'étudiants dans chaque classe de notes) des notes finales de physique et de mathématiques de 100 étudiants. On supposera que ces 100 étudiants sont représentatifs de tous les étudiants ayant passés l'examen. Soit un étudiant choisit au hasard et dont les copies n'ont pas été corrigées. A partir du tableau que diriez-vous de :

a.) la probabilité, pour cet étudiant, d'avoir entre 80 et 89 en mathématiques et entre 70 et 79 en physique.

b.) la probabilité qu'il ait une note de mathématiques inférieure à 70.

c.) la probabilité qu'il ait une note de mathématiques inférieure à 70 et supérieure ou égale à 70 en physique.

d.) la probabilité qu'il soit reçu à au moins une matière sachant que la note minimum pour être reçu est 60.

e.) sa note de physique « la plus probable », sa note de mathématiques la plus probable, son couple de notes maths-physique le plus probable.

f.) Sachant qu'il a entre 60 et 69 en mathématiques, quelle est sa note de physique la plus probable ?

g.) Quel vocabulaire des probabilités (lois conjointes, marginales...) relieriez-vous aux quantités calculées aux questions a-f? Expliquer succinctement.

Notes de Mathématiques → Notes de Physique ↓	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
90-99				2	4	4
80-89			1	4	6	5
70-79			5	10	8	1
60-69	1	4	9	5	2	
50-59	3	6	6	2		
40-49	3	5	4			

II. Somme de deux variables gaussiennes

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, et $Z = (X+Y)/2$ une nouvelle variable aléatoire.

a.) En effectuant le changement de variable $z = (x+y)/2$; $y' = y$ montrer que les densités de probabilités sont reliées par :

$$f_{Z,Y}(z, y') = 2 f_{X,Y}(2z - y', y')$$

b.) En déduire que la densité marginale $f_Z(z)$ s'exprime par :

$$f_Z(z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(2z - y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y.$$

c.) Si X et Y suivent toutes deux des lois gaussiennes de moyennes μ et d'écart type σ, calculer la loi suivie par Z. Quelle sa moyenne, son écart type ?

——— Fin ———

Texte d'examen et corrigé disponibles à
`http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`