Mathématiques
Examen de septembre 2000

Magistère de sciences de la Terre, 1ère année, ENS-Lyon.

Examen avec documents. 2 pages. Durée : 1h30

— o —

Problème I

Géomagnétisme et équation d'induction en symétrie radiale

On suppose qu'il existe un champ magnétique B à la surface du noyau (rayon $r = r_0$) et que dans le manteau il vérifie l'équation d'induction :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \Delta B \tag{1}$$

avec t le temps, Δ l'opérateur Laplacien, $\eta = 1/\mu_0\sigma$ où σ est la conductivité et μ_0 la perméabilité électrique ; en symétrie radiale la relation se réduit à :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) B_r. \tag{2}$$

1. Montrer que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_r). \tag{3}$$

2. On pose $Q = rB_r$; donner l'équation vérifiée par Q. A quelle famille de relations appartient-elle ?

3. On cherche alors Q sous la forme $Q = e^{i\omega t}q(r)$. Pourquoi écrit-on cela ? Quelle équation vérifie q ?

4. Chercher q sous la forme $q = q_1\, e^{iKr} + q_2\, e^{-iKr}$ avec $K, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ et avec les conditions aux limites $q = q_0$ en $r = r_0$ et $q = 0$ en l'infini.

5. Écrire la solution sous la forme :

$$Q = q_0\, e^{i\omega t}\, e^{-(1+i)(r-r_0)/\delta}. \tag{4}$$

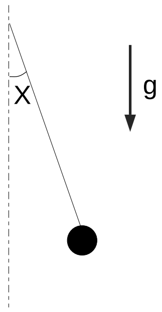
Donner l'expression et la signification de δ.

6. Conclure en fonction de σ et de T (période liée à ω). Le manteau est généralement supposé isolant ($\sigma \to 0$). Qu'est-ce que cela implique pour la mesure en surface des variations temporelles du champ du noyau ? Même question s'il existe de plus une couche très conductrice entre le manteau et le noyau (couche D"). Représenter schématiquement le module de $q(r = 2r_0)$ en fonction de ω.

Problème II

Oscillateur harmonique non linéaire

On considère un pendule pesant constitué d'une masse M. X est l'angle entre le fil et la verticale (voir figure ci-dessous).



1. Rappeler brièvement la méthode qui permet d'affirmer que l'équation du mouvement est

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin(X) = 0. \tag{5}$$

2. On considère des petits déplacements autour de la position d'équilibre, c'est à dire qu'on écrit $X = \epsilon' \hat{X}$. Ecrire l'équation vérifiée par $\hat{X}$ en effectuant un développement limité de la fonction sinus. On posera $\epsilon = \epsilon'^2 \omega_0^2/6$, et on écrira l'équation à l'ordre 1 en ϵ.

3. On cherche une solution de cette équation sous la forme $\hat{X} = X_0 + \epsilon X_1$. Montrez que

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 X_0 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 X_1 = X_0^3. \tag{7}$$

4. Résoudre l'équation en X_0.

5. Montrer que X_1 est de la forme :

$$X_1 = B\exp(i\omega_0 t) + C\exp(3i\omega_0 t) + Dt\exp(i\omega_0 t) + c.c. \tag{8}$$

Où *c.c.* correspond aux complexes conjugés. Donner une interprétation physique de chaque terme.

6. En écrivant $X_0 = A\exp(i\omega_0 t) + c.c.$, donner l'expression de C et D.

— Fin —