TD probabilités. 2/12/98

1. On pose $L = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

$$\begin{aligned}\overline{L} = \mathcal{E}(L) &= \mathcal{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(X_i)\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(L) &= \mathcal{E}((L-\overline{L})^2)\\ &= \mathcal{E}(L^2) - \mathcal{E}(L)^2\\ &= \mathcal{E}(L^2)\\ &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \times \sum_{j=1}^{N} X_j\right)\\ &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} X_i X_j\right)\\ &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{N} {X_i}^2\right) + \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} X_i X_j\right)\\ \text{Comme tous les } X_i \text{ sont} &\quad \text{indépendants deux à deux:}\\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}({X_i}^2) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \mathcal{E}(X_i)\mathcal{E}(X_j)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}({X_i}^2)\\ &= N\sigma^2\end{aligned}$$

Car, $\forall i, \mathcal{E}({X_i}^2) = Var(X_i) + [\mathcal{E}(X_i)]^2 = Var(X_i)$

2.

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sigma\sqrt{N}}$$

a/

$$\begin{aligned}g_Z(t) &= \mathcal{E}(e^{itZ})\\ &= \mathcal{E}(e^{it\sum_{j=1}^{N} X_j/(\sigma\sqrt{N})})\\ &= \mathcal{E}(e^{\sum_{j=1}^{N} iX_j t/(\sigma\sqrt{N})})\\ &= \mathcal{E}(\Pi_{j=1}^{N} e^{iX_j t/(\sigma\sqrt{N})})\end{aligned}$$

Comme tous les X_i sont indépendants deux à deux:

$$
\begin{aligned}
&= \Pi_{j=1}^{N} \mathcal{E}(e^{iX_j t/(\sigma\sqrt{N})}) \\
&= g_{X_j}(t/(\sigma\sqrt{N}))^N, \text{ j qcq.}
\end{aligned}
$$

b/ D'une manière générale, une fonction f possède un développement de Taylor à l'ordre n au voisinage de a ssi:

$$f(x) = f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\epsilon(x-a)$$

,avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

Commençons par effectuer un développement de Taylor à l'ordre 3 de $g_{x_i}(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$ autour de 0.

$$g_{x_i}(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}) = 1+g_{x_i}{}^{(1)}(0)+\frac{t^2}{\sigma^2 N}\frac{g_{x_i}{}^{(2)}(0)}{2!}+\frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{3/2}}\frac{g_{x_i}{}^{(3)}(0)}{3!}+\frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{3/2}}\epsilon(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$$

D'une manière générale, pour toute VA Y, et qqsoit t, la fonction génératrice g_Y s'écrit:

$$g_Y(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(t)^j}{j!}g_Y{}^{(j)}(0).$$

En identifiant avec l'équation précédente, on obtient:

$$g_Y{}^{(j)}(0) = i^j\mathcal{E}(Y^j)$$

D'où:

$$g_{X_i}{}^{(1)}(0) = i\mathcal{E}(X_i) = 0$$

$$g_{X_i}{}^{(2)}(0) = i^2\mathcal{E}(X_i{}^2) = -\sigma^2$$

On a donc:

$$g_{x_i}(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}) = 1 + \frac{1}{N}(\frac{-t^2}{2} + \frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{1/2}}\frac{g_{x_i}{}^{(3)}(0)}{3!} + \frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{1/2}}\epsilon(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} g_Z(t) &= \lim_{N\to\infty} g_{X_j}(t/(\sigma\sqrt{N}))^N \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\left(\frac{-t^2}{2}+\frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{1/2}}\frac{g_{x_i}{}^{(3)}(0)}{3!}+\frac{t^3}{\sigma^{3/2}N^{1/2}}\epsilon(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})\right)\right]^N \\
&= e^{\frac{-t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Il s'agit de la fonction génératrice de la loi normale centrée réduite. La fonction génératrice d'une loi de probabilité étant unique, on en déduit que la VA Z suit une loi normale centrée réduite.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

c/ Le nombre total N de sauts s'écrit:

$$N = \frac{t}{\tau}$$

L'hypothèse $t >> \tau$ implique que N est très grand.
Rigoureusement, N étant un entier, t est une variable discrète. En pratique, et à partir de la question suivante, on supposera que τ est suffisemment petit pour considérer t comme étant continue.

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sigma\sqrt{\frac{t}{\tau}}Z$$

Ce changement de variable est bijectif et monotone, donc on peut écrire:

$$f_X(x) = f_Z(z)\frac{1}{|dx/dz|}$$

$$\frac{dx}{dz} = \sigma\sqrt{\frac{t}{\tau}}$$

D'où:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau}}}e^{-\frac{x^2}{\frac{\sigma^2 t}{\tau}}}$$

3. Il suffit de dériver f_X. On trouve:

$$D = \frac{\sigma^2}{2\tau}$$

Le phénomène physique mis en jeu est bien sûr la diffusion. Ainsi, partant d'un problème simple de marche aléatoire, on met en évidence le fait que la position $X(t)$ de la grenouille décrit exactement la loi de la diffusion, pour $t >> \tau$. On a travaillé avec une hypothèse simple de marche unidimensionnelle (la grenouille se déplace dans un tuyau), mais cette démonstration se généralise à n dimensions. Ceci peut s'appliquer à de nombreux exemples dans la nature (cf par ex exercice sur la diffusion de colorant au sein d'un milieu homogène).

4.

$$W = \sum_{i=1}^{N}(X_i - l) = \sum_{i=1}^{N} X_i - Nl = X(t) - Nl$$

La fonction ϕ, qui à X associe W est bijective et monotone, donc on peut écrire:

$$h_X(x) = h_W(w)\frac{1}{\left|\frac{dx}{dw}\right|}.$$

W est une VA de moyenne nulle, donc elle obéit à la loi de probabilité précédente:

$$h_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}}e^{-\frac{w^2}{4Dt}}$$

Donc:

$$\begin{aligned} h_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{(x-Nl)^2}{4Dt}} \frac{1}{\left|\frac{dx}{dw}\right|} \\ \Leftrightarrow h_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{(x-Nl)^2}{4Dt}} \end{aligned}$$

Posons $V = \frac{l}{\tau}$.
V a la dimension d'une vitesse. On a donc:

$$Nl = \frac{t}{\tau} V\tau = Vt.$$

Ainsi:

$$h_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}$$

On a donc affaire à une variable aléatoire qui suit une loi normale dont la moyenne se déplace au cours du temps.

Que se passe-t-il pour l'équation de la question précédente?

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_X}{\partial t} &= \frac{e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2D}} t^{-1/2} \left[\frac{-1}{2t} + \frac{1}{4Dt^2}\left[2Vt(x-Vt) + (x-Vt)^2\right]\right] \\ \frac{\partial h_X}{\partial x} &= \frac{e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2D}} t^{-1/2} \left[-\frac{(x-Vt)}{2Dt}\right] \\ \frac{\partial^2 h_X}{\partial x^2} &= \frac{e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2D}} t^{-1/2} \left[\frac{(x-Vt)^2}{4Dt^2} - \frac{1}{2t}\right] \frac{1}{D} \end{aligned}$$

On trouve donc:

$$\frac{\partial h_X}{\partial t} - V\frac{\partial h_X}{\partial x} = D\frac{\partial^2 h_X}{\partial x^2}$$

Il s'agit d'une équation d'advection-diffusion ($V\frac{\partial h_X}{\partial x}$: terme d'advection, et $D\frac{\partial^2 h_X}{\partial x^2}$: terme de diffusion).
Rq: *On aurait pu arriver à la même conclusion de manière plus élégante en utilisant h_W. h_W est une fonction de w et de t. W suit une loi de proba de moyenne nulle, donc elle vérifie l'équation précédente, à ceci près que w est une fonction de t: la dérivée par rapport au temps doit donc s'interpréter comme une dérivée particulaire:*

$$\frac{dh_W}{dt} = \frac{\partial h_W}{\partial t} + \frac{\partial h_W}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial h_W}{\partial t} - V\frac{\partial h_W}{\partial w}$$