TD probabilités. 4/11/98

Exercice 1

On effectue le changement de variable:

$$h : \begin{cases} \begin{cases}]0,\infty[\times]-\infty,\infty[& \rightarrow & [0,\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\\ (X,Y) & \rightarrow & h(X,Y)=(R,\Theta) \end{cases} \\ \\ \begin{cases}]-\infty,0]\times]-\infty,\infty[& \rightarrow & [0,\infty[\times[\pi/2,3\pi/2] \\ (X,Y) & \rightarrow & h(X,Y)=(R,\Theta) \end{cases} \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$h : \begin{cases}]-\infty,\infty[\times]-\infty,\infty[& \rightarrow & [0,\infty[\times]-\pi/2,3\pi/2] \\ (X,Y) & \rightarrow & h(X,Y)=(R,\Theta) \end{cases}$$

tel que:

$$\begin{cases} X = Rcos\Theta \\ Y = Rsin\Theta \end{cases}$$

Soit J le jacobien de cette transformation. La transfo est bijective sur le domaine considéré:

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(x,y)\frac{1}{|J|}$$

Il est plus aisé de calculer le jacobien J' de la transformation inverse:

$$h^{-1} : \begin{cases} [0,\infty[\times]-\pi/2,3\pi/2] & \rightarrow &]-\infty,\infty[\times]-\infty,\infty[\\ (R,\Theta) & \rightarrow & h(R,\Theta)=(X,Y) \end{cases}$$

Comme on sait que $J' = 1/J$, on a donc:

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(x,y)\left|J'\right|.$$

$$\begin{aligned} J' &= 1/J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{dr} & \frac{\partial x}{d\theta} \\ \frac{\partial y}{dr} & \frac{\partial y}{d\theta} \end{vmatrix} \\ &= r \end{aligned}$$

$XetY$ sont deux VA indépendantes suivant chacune une loi normale centrée d'écart-type $\sqrt{2Dt}$ donc:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2Dt}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{2Dt}\right)}.$$

Donc:

$$f_{R\Theta} = \frac{r}{2\pi}\times\frac{1}{2Dt}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{2Dt}\right)}.$$

Finalement, les deux densités de proba marginales f_R et f_Θ s'écrivent:

$$\begin{aligned}
f_R(r) &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f_{R\Theta}(r,\theta)d\theta = \frac{r}{2Dt}e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \\
f_\Theta(\theta) &= \int_0^\infty f_{R\Theta}(r,\theta)dr = \frac{1}{2\pi\sqrt{2Dt}}\int_0^\infty \frac{r}{\sqrt{2Dt}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sqrt{2Dt}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty ue^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

f_R est une loi de Rayleigh, et f_Θ une loi uniforme.

Rq: *Il est logique que la loi de Θ soit une loi uniforme, car X et Y suivant la même loi de proba, il n'y a pas de direction privilégiée, c'est-à-dire que tous les angles Θ sont équiprobables.*

Exrcice 2

Soit Z la VA caractérisant la durée de vie totale du système.

a/

$$\begin{aligned}
& Z = max(X,Y) \\
& P(Z \le z) = P(X \le z, Y \le z) \\
\Leftrightarrow \quad & F_Z(z) = F_{XY}(z,z) = F_X(z)F_Y(z) \ \ (indep^{ce} \text{ des VA X et Y}) \\
\text{Donc:} \quad & f_Z(z) = f_X(z)F_Y(z) + F_X(z)f_Y(z)
\end{aligned}$$

b/

$$\begin{aligned}
& Z = min(X,Y) \\
& P(Z \le z) = 1 - P(Z > z) \\
\Leftrightarrow \quad & F_Z(z) = 1 - P(X > z, Y > z) \\
\Leftrightarrow \quad & F_Z(z) = 1 - [(1 - P(X \le z))(1 - P(Y \le z))] \\
\Leftrightarrow \quad & F_Z(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)
\end{aligned}$$

c/

$$Z = X + Y$$

Soit le changement de variable:

$$\begin{cases} U = X \\ Z = X + Y \end{cases}$$

Le jacobien de la transfo vaut 1.

$$f_{ZU}(z,u) = f_{XY}(x,y) \times \frac{1}{1}$$

Or,

$$\begin{array}{ll} f_X(x) = \frac{1}{a}, & x \in [0, a] \\ f_Y(y) = \frac{1}{b}, & x \in [0, b] \end{array}$$

Donc:

$$f_{ZU}(z, u) = f_X(u) f_Y(z - u),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in [0, a] \\ z - u \in [0, b] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in [0, a] \\ z \in [u, u + b] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z \in [0, a + b] \\ u \in [-b + z, z] \end{array} \right.$$

On a:

$$f_Z(z) = \int_{D_u} f_{ZU}(z, u) du$$

On doit distinguer trois cas (cf fig 1):

1. Si $0 \leq z \leq a$: On a alors $0 \leq u \leq z$ (domaine D_1).

$$f_Z(z) = \frac{1}{ab} \int_0^z du = \frac{z}{ab}$$

2. Si $a \leq z \leq b$: On a alors $0 \leq u \leq a$ (domaine D_2).

$$f_Z(z) = \frac{1}{ab} \int_0^a du = \frac{1}{b}$$

3. Si $b \leq z \leq a + b$: On a alors $-b + z \leq u \leq a$ (domaine D_3).

$$f_Z(z) = \frac{1}{ab} \int_{-b+z}^a du = \frac{a + b - z}{ab}$$

Rq: *La fonction f_Z est le résultat du produit de convolution entre les densités de proba de X et Y. Si $a = b$, on retrouve le résultat classique suivant: la convolution de deux fonction "porte" de même largeur donne une fonction triangulaire.*

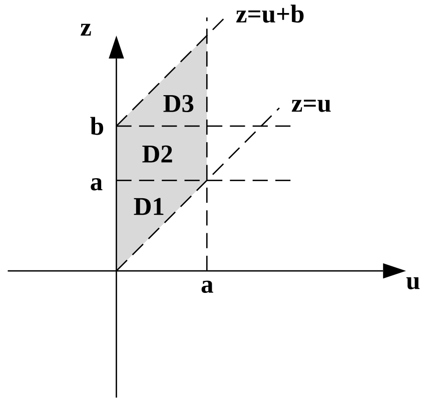

Fig 1

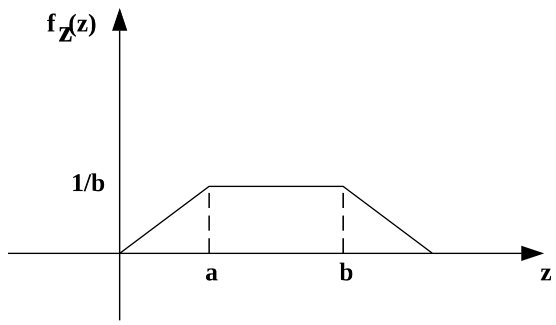

Fig 2