TD probabilités. 21/10/98

Exercice 1

1. Soient $X_H^1, ..., X_H^{n_H}$ les chiffres d'affaires quotidiens en hiver, et W_H le chiffre d'affaires total pour l'hiver.

$$W_H = \sum_{i=1}^{n_H} X_H^i$$

n_H=5moisx30jours=150.
On cherche $P(W_H \leq 1180000)$.
Le th central limite nous dit que la distribution de proba de la VA:

$$Z_H = \frac{W_{n_H} - n_H \mu_H}{\sigma_H \sqrt{n_H}}$$

tend vers la loi normale centrée réduite quand n_H tend vers l'infini.
On va donc utiliser ce résultat pour approximer $P(W_H \leq 1180000)$ (on considère que n_H=150 est suffisemment grand pour confondre la loi de Z_H avec la loi normale).

$$\begin{aligned}
P(W_H \leq 1180000) &= P(Z_H \leq \frac{1180000 - n_H \mu_H}{\sigma_H \sqrt{n_H}}) \\
&= P(Z_H \leq -1.63) \\
&\simeq \int_{-\infty}^{-1.63} f(x)dx \\
&\quad \text{où f est la ddp de la loi norm centrée réd.} \\
&= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{-1.63} \\
&= .5 - \int_{0}^{1.63} \\
&= .5 - .4484 = .0516
\end{aligned}$$

2. Même principe.
n_E=7*30jours=210

$$\begin{aligned}
P(970000 < W_E \leq 1005000) &= P(\frac{970000 - n_E \mu_E}{\sigma_E \sqrt{n_E}} < Z_E \leq \frac{1005000 - n_E \mu_E}{\sigma_E \sqrt{n_E}}) \\
&= P(1.44 < Z_H \leq 3.45) \\
\simeq \int_{1.44}^{3.45} f(x)dx & \\
&= \int_{0}^{3.45} - \int_{0}^{1.44} \\
&= .07
\end{aligned}$$

3. On cherche $P(|W_H + W_E - \mu_{TA}| \leq \frac{\sigma_{TA}}{2})$. Il faut d'abord déterminer μ_{TA} et σ_{TA}, ainsi que la loi de $W_{TA} = W_H + W_E$.
Utilisons les fonctions génératrices:

$$\begin{aligned} g_{W_{TA}}(t) &= \mathcal{E}(e^{itW_{TA}}) \\ &= \mathcal{E}(e^{it\sigma_H\sqrt{n_H}Z_H}e^{itn_H\mu_H})\mathcal{E}(e^{it\sigma_E\sqrt{n_E}Z_E}e^{itn_E\mu_E}) \\ &= e^{it(n_H\mu_H+n_E\mu_E)}g_{Z_H}(\sigma_H\sqrt{n_H}t)g_{Z_E}(\sigma_E\sqrt{n_E}t) \\ &= e^{it(n_H\mu_H+n_E\mu_E)}e^{-\frac{t^2}{2}({\sigma_H}^2n_H+{\sigma_E}^2n_E)} \end{aligned}$$

Comme la fonction génératrice d'une loi (quand elle existe) est unique, et comme $g_{W_{TA}}$ correspond à une loi normale de moyenne $n_H\mu_H + n_E\mu_E$ et de variance ${\sigma_H}^2n_H + {\sigma_E}^2n_E$, on a démontré que:
si Z_H et Z_E suivent chacune la loi normale centrée réduite, alors la somme $W_H + W_E = W_{TA}$ suit une loi normale de moyenne $\mu_{TA} = n_H\mu_H + n_E\mu_E$ et de variance ${\sigma_{TA}}^2 = {\sigma_H}^2n_H + {\sigma_E}^2n_E$.
Or:

$$P(|W_H + W_E - \mu_{TA}| \leq \frac{\sigma_{TA}}{2}) = P(-\frac{1}{2} < W_H + W_E - \mu_{TA} \leq \frac{1}{2})$$

Donc:

$$P(|W_H + W_E - \mu_{TA}| \leq \frac{\sigma_{TA}}{2}) \simeq 2\int_0^{.5} f(x)dx = .38$$

(où f est la ddp de la loi normale centrée réd.)

Exercice 2

Soit $(X_1, X_2, ..., X_{36})$ l'échantillon de 36 cristaux.

$$\overline{X} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i.$$

On cherche: $P(a < \overline{X} - \mu \leq b)$, avec $.245 < \overline{X} \leq .255$, et tour à tour:

a/ μ=.24 et σ=.015

b/ μ=.2515 et σ=.005.

On considère 36 échantillons, donc on est dans les conditions d'application du th central limite: on va pouvoir utiliser la VA $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{36}}$.
$.245 < \overline{X} \leq .255$, donc:

$$Prob = P(\frac{.245 - \mu}{\sigma/\sqrt{36}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{36}} \leq \frac{.255 - \mu}{\sigma/\sqrt{36}})$$

Cas a/:

$$Prob \simeq \int_2^6 f(x)dx \simeq \int_2^{\infty} f(x)dx \simeq .0228$$

Cas b/:

$$Prob \simeq \int_{-7.8}^{4.2} f(x)dx \simeq 1.$$

On a donc de bonnes chances de garder un échantillon dont la moyenne des diamètres des cristaux (au sens des proba et non estimée) est assez proche de ce que l'on souhaite.